# MATEMÁTICA

## 1

Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

**Resolução**

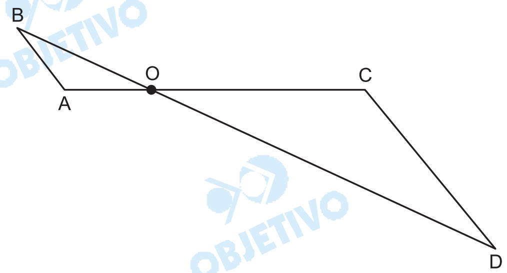
*Se $\ell$, m e a são as quantias em reais que Lúcia, Maria e Amélia possuem, então*

$$\begin{cases} \ell + 3 = a - 3 \\ \ell + \dfrac{m}{3} = a + 6 \\ \dfrac{a}{2} = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3\ell - 3a + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3a - 2m = 0 \\ m = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 18 \\ m = 36 \\ a = 24 \end{cases}$$

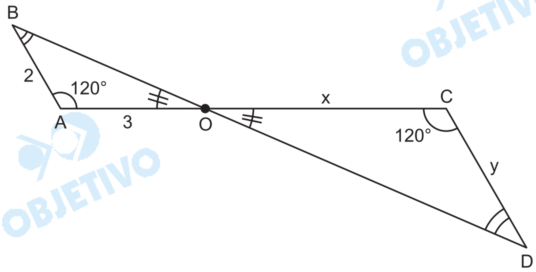
***Resposta:*** *Amélia possui 24 reais, Lúcia possui 18 reais e Maria possui 36 reais.*

Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, o ângulo $O\hat{A}B$ mede 120°, AO = 3 e AB = 2. Sabendo-se ainda que a área do triângulo OCD vale $600\sqrt{3}$,




a) calcule a área do triângulo OAB.
b) determine OC e CD.

**Resolução**




*a) A área do triângulo AOB é:*

$$S = \frac{AB \cdot AO \cdot \text{sen } 120°}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

*b) Sendo x = CO e y = CD, da semelhança dos triângulos AOB e DOC, tem-se:*

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{y} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{3}$$

*Por outro lado, a área do triângulo COD é igual a $600\sqrt{3}$.*

*Assim:* $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen } 120° = 600\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3600 \Leftrightarrow x = 60, \text{ pois } x > 0$$

$$\text{e } y = \frac{2 \cdot 60}{3} = 40$$

***Respostas:*** *a)* $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *unidades de área*

*b) CO = 60 unidades de comprimento e CD = 40 unidades de comprimento*

## 3

Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.

b) o 20° termo da progressão.

c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

**Resolução**

*Admitindo que $S_n = bn^2 + n$,* ***qualquer que seja n*** $\in \mathbb{N}^*$*, e sendo r a razão da PA, temos:*

*a)* $a_3 = S_3 - S_2 = (b \,.\, 3^2 + 3) - (b \,.\, 2^2 + 2) =$

$$= 5b + 1 = 7 \Rightarrow b = \frac{6}{5}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (b \,.\, 2^2 + 2) - (b \,.\, 1^2 + 1) =$$

$$= 3b + 1 = 3 \,.\, \frac{6}{5} + 1 = \frac{23}{5}$$

*A razão* ***r*** *é tal que:*

$$r = a_3 - a_2 = 7 - \frac{23}{5} = \frac{12}{5}$$

*b)* $a_{20} = S_{20} - S_{19} = (b \,.\, 20^2 + 20) - (b \,.\, 19^2 + 19) =$

$$= 39b + 1 = 39 \,.\, \frac{6}{5} + 1 = \frac{239}{5}$$

*c)* $S_{20} = \frac{6}{5} \,.\, 20^2 + 20 = 500$

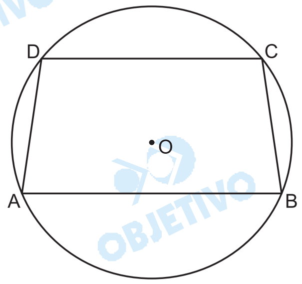
***Respostas:*** *a)* $b = \frac{6}{5}$ *e* $r = \frac{12}{5}$

*b)* $a_{20} = \frac{239}{5}$

*c)* $S_{20} = 500$

A figura representa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio.

Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e AC = $3\sqrt{2}$.

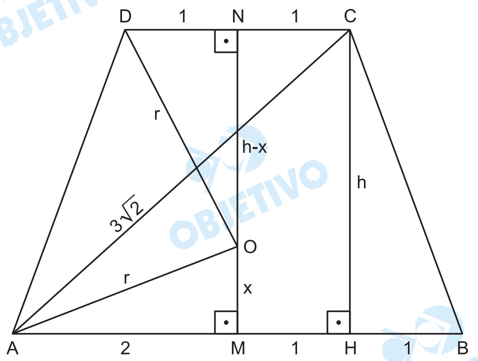



a) Determine a altura do trapézio.

b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.

c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

**Resolução**




a) *Seja h a medida da altura do trapézio.*
*No triângulo retângulo AHC, temos:*

$$h^2 + 3^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 \Leftrightarrow h = 3$$

b) *Seja r a medida do raio da circunferência.*
*Dos triângulos retângulos AMO e DNO, temos:*

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + 2^2 \\ r^2 = 1^2 + (h - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + 4 \\ r^2 = 1^2 + (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + 4 \\ r^2 = 1 + 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + 4 \\ x^2 + 4 = 10 - 6x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ r = \sqrt{5}, \text{ pois } r > 0 \end{cases}$$

c) *Sendo S a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência, temos:*

$$S = S_{círculo} - S_{trapézio} =$$

$$= \pi \cdot (\sqrt{5})^2 - \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} = 5\pi - 9$$

**Respostas:** *a) $h = 3$ b) $r = \sqrt{5}$ c) $S = 5\pi - 9$*

## 5

Um arco x está no terceiro quadrante do círculo trigonométrico e verifica a equação $5\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 4$.

Determine os valores de senx e cosx.

**Resolução**

1º) $5 \cdot \cos(2x) + 3 \cdot \operatorname{sen} x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x) + 3 \cdot \operatorname{sen} x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 3 \cdot \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{5}$ (pois x pertence ao 3º quadrante)

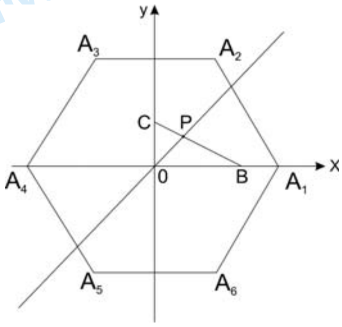
2º) Se $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{5}$ e $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (pois x pertence ao 3º quadrante)

***Resposta:*** $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{5}$ e $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Na figura abaixo, os pontos $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ são vértices de um hexágono regular de lado 3 com centro na origem O de um sistema de coordenadas no plano. Os vértices $A_1$ e $A_4$ pertencem ao eixo x. São dados também os pontos (B = 2,0) e C = (0,1).



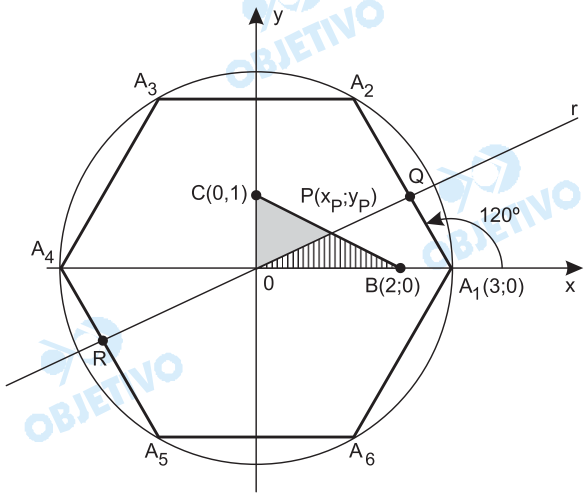

Considere a reta que passa pela origem O e intersecta o segmento $\overline{BC}$ no ponto P, de modo que os triângulos OPB e OPC tenham a mesma área. Nessas condições, determine

a) a equação da reta $\overleftrightarrow{OP}$.

b) os pontos de interseção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o hexágono.

**Resolução**

*A partir do enunciado, e considerando a figura a seguir, temos:*




*a)*

*1º)* $\left.\begin{array}{l} A_{\Delta OBC} = \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1 \\ A_{\Delta OPB} = A_{\Delta OPC} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta OPB} = A_{\Delta OPC} = \dfrac{1}{2}$

*2º) Se $P(x_P, y_P)$, temos*

$$A_{\Delta OPB} = \frac{OB \cdot y_P}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot y_P}{2} \Leftrightarrow y_P = \frac{1}{2}$$

$$A_{\Delta OPC} = \frac{OC \cdot x_P}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot x_P}{2} \Leftrightarrow x_P = 1$$

*Portanto:* $P\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

3º) A equação da reta $\overleftrightarrow{OP}$, que passa pela origem e tem coeficiente angular $m = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{1}{2}$, é $y = \dfrac{1}{2} \cdot x$

b)

1º) A equação da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, que passa pelo ponto $A_1(3; 0)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$, é:

$y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \cdot (x - 3)$

2º) O ponto Q é a intersecção das retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, então

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = -\sqrt{3} \cdot (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{11} \\ y = \dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{22} \end{cases}$$

Portanto: $Q\left(\dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{11} ; \dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{22}\right)$

3º) O ponto **R**, intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta $\overleftrightarrow{A_4A_5}$, é o ponto simétrico de Q em relação à origem, resultando as coordenadas

$R\left(\dfrac{-6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{11} ; \dfrac{-6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{22}\right)$

**Respostas:** a) $y = \dfrac{1}{2} \cdot x$

b) $Q\left(\dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{11} ; \dfrac{6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{22}\right)$

$R\left(\dfrac{-6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{11} ; \dfrac{-6 \cdot (6 - \sqrt{3})}{22}\right)$

## 7

Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

**Resolução**

*A urna tem exatamente 5 bolas brancas e 3 pretas. Assim,*

*a) a probabilidade de se obter, em 3 extrações sem reposição, duas bolas pretas e uma branca é:*

$$3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{56}$$

*b) 1º) a probabilidade de se obter, de modo análogo, duas brancas e uma preta é:*

$$3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{30}{56}$$

*2º) a probabilidade de se obter duas brancas e uma preta, sabendo-se que as bolas não têm a mesma cor, é:*

$$\frac{\dfrac{15}{56}}{\dfrac{15}{56} + \dfrac{30}{56}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

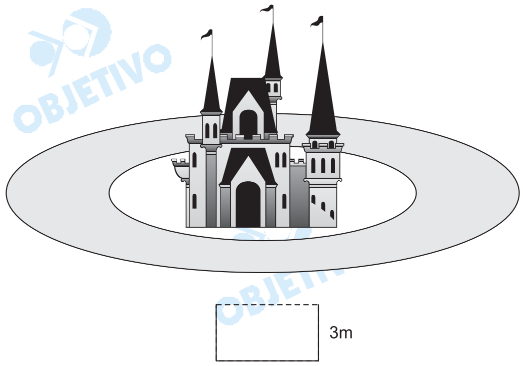
***Respostas:*** *a)* $\frac{15}{56}$ *b)* $\frac{1}{3}$

***Obs:*** *Para o item (b), outra maneira de resolver é:*
*O número de maneiras de retirar 2 bolas pretas e uma branca é:* $C_{3,2} \cdot C_{5,1} = 3 \cdot 5 = 15$

*O número de possibilidades de retirar 3 bolas não da mesma cor é:* $C_{8,3} - C_{5,3} - C_{3,3} = 56 - 10 - 1 = 45$

*A probabilidade pedida é* $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é **constante** e igual a 3 m.

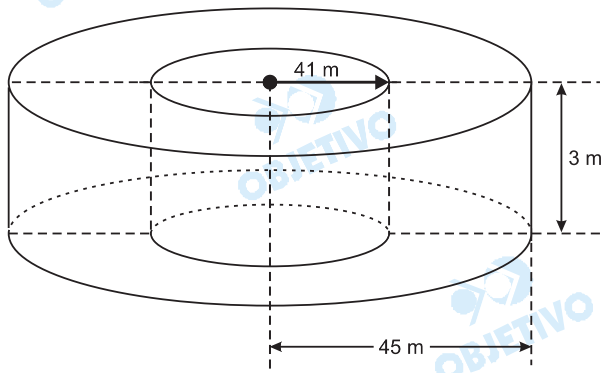



Seção transversal da vala

O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.

Determine o número mínimo de caminhões-pipa necessário para encher completamente a vala.

**Resolução**




*1) Sejam:*

*$V_1$ o volume, em $m^3$, do cilindro circular reto de raio 41m e altura 3m,*

*$V_2$ o volume, em $m^3$, do cilindro circular reto de raio 45m e altura 3m,*

*$V_v$ o volume, em $m^3$, da vala e*

*$V_c$ o volume, em $m^3$, do reservatório de cada caminhão.*

*2)* $V_1 = \pi \,.\, 41^2 \,.\, 3 = 5043\pi$

$V_2 = \pi \,.\, 45^2 \,.\, 3 = 6075\pi$

$V_c = \pi \,.\, (1,5)^2 \,.\, 8 = 18\pi$

*3)* $V_v = V_2 - V_1 = 6075\pi - 5043\pi = 1032\pi$

*4) O número mínimo de caminhões necessários e suficientes é o menor inteiro n tal que*

$$n \geq \frac{V_v}{V_c} = \frac{1032\pi}{18\pi} \simeq 57,3.$$ *Portanto, 58 caminhões.*

***Resposta:*** *58 caminhões*

# 9

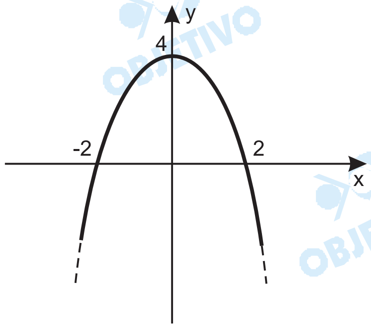
a) Represente, no sistema de coordenadas desenhado na folha de respostas ao lado, os gráficos das funções

$$f(x) = |4 - x^2| \text{ e } g(x) = \frac{x + 7}{2}.$$

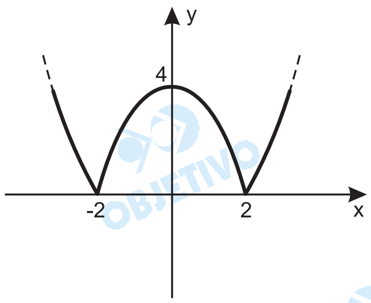
b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \leq \dfrac{x + 7}{2}$.

**Resolução**

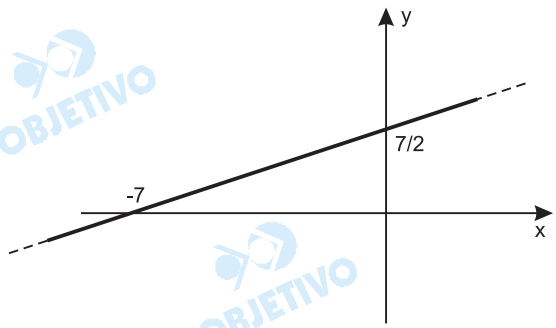
*a) O gráfico de $h(x) = 4 - x^2$ é do tipo*




*e, portanto, o gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$ resulta*




*O gráfico de $g(x) = \dfrac{x + 7}{2}$ é*




*As abscissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos são as soluções da equação*

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |4 - x^2| = \frac{x + 7}{2}$$

*Para $x \leq 2$ ou $x \geq 2$, temos:*

$$-4 + x^2 = \frac{x + 7}{2} \Leftrightarrow -8 + 2x^2 = x + 7 \Leftrightarrow$$

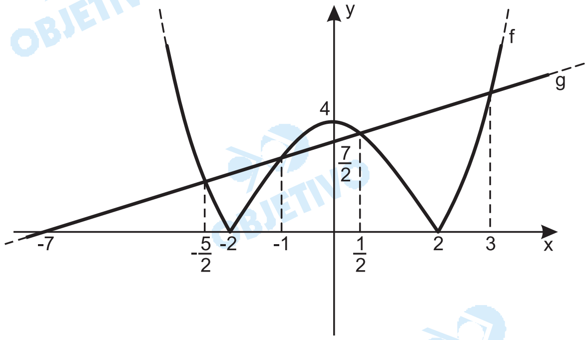
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = 3$$

*Para $-2 \leq x \leq 2$, resulta*

$$4 - x^2 = \frac{x+7}{2} \Leftrightarrow 8 - 2x^2 = x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

*Representando os dois gráficos num mesmo sistema de coordenadas, resulta:*




b) *Analisando os gráficos esboçados no item anterior, com as correspondentes abscissas dos pontos comuns, concluímos que* $|4 - x^2| \leq \frac{x+7}{2} \Leftrightarrow$

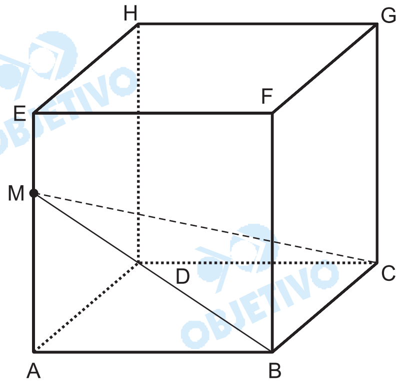
$$\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

**Respostas:** a) gráfico

$$b)\ S = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{5}{2} \leq x \leq -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \right\}$$

## 10

O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento **a**. O ponto M está na aresta $\overline{AE}$ e AM = 3 . ME. Calcule:




a) O volume do tetraedro BCGM.

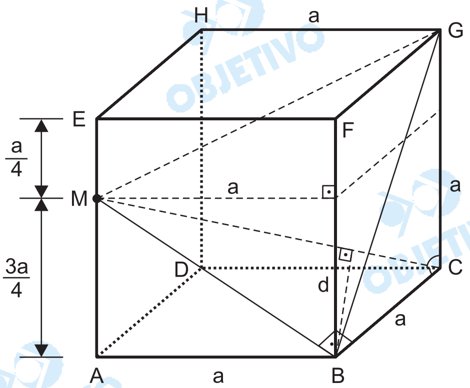
b) A área do triângulo BCM.

c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento $\overline{CM}$.

**Resolução**

*Sendo AM + ME = a e AM = 3 . ME, tem-se:*

$$AM = \frac{3a}{4} \quad e \quad ME = \frac{a}{4}$$




a) *O volume V do tetraedro BCGM é dado por um terço do produto entre a área do triângulo BCG e a distância **a**, do ponto M ao plano que contém o triângulo BCG.*

*Assim:* $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a \cdot a}{2}\right) \cdot a \Leftrightarrow V = \frac{a^3}{6}$

b) $(BM)^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (BM)^2 = \frac{25a^2}{16} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow BM = \frac{5a}{4}$$

*Assim, a área S do triângulo retângulo BCM é:*

$$S = \frac{BM \cdot BC}{2} \Leftrightarrow S = \frac{\frac{5a}{4} \cdot a}{2} \Leftrightarrow S = \frac{5a^2}{8}$$

c) $(CM)^2 = (BM)^2 + (BC)^2 \Leftrightarrow (CM)^2 = \left(\dfrac{5a}{4}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow CM = \frac{a\sqrt{41}}{4}$$

*A distância* ***d*** *entre o ponto B e a reta* $\overleftrightarrow{CM}$ *é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo BCM.*

Assim: $CM \,.\, d = BM \,.\, BC \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{41}}{4} \,.\, d = \dfrac{5a}{4} \,.\, a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d = \frac{5a}{\sqrt{41}} \Leftrightarrow d = \frac{5a\sqrt{41}}{41}$$

***Respostas:*** a) $\dfrac{a^3}{6}$ b) $\dfrac{5a^2}{8}$ c) $\dfrac{5a\sqrt{41}}{41}$

## Comentário e Gráfico

### Matemática

*Com quatro questões de álgebra, quatro de geometria, uma de trigonometria e uma de geometria analítica, todas muito bem enunciadas, a banca examinadora formulou uma excelente prova de Matemática.*

| | |
|---|---|
| **40%** | Álgebra |
| **40%** | Geometria |
| **10%** | Trigonometria |
| **10%** | Geometria Analítica |