

BIOLOGIA

1



Na produção de cerveja, são usadas principalmente duas linhagens de leveduras:

- I. *Saccharomyces cerevisiae*, que apresenta altos índices de formação de gás carbônico;
- II. *Saccharomyces carlsbergensis*, que possui índices mais baixos de formação desse gás.

Em geral, as cervejas inglesas contêm maior teor alcoólico que as cervejas brasileiras e cada uma delas usa uma linhagem diferente de levedura.

- a) Qual linhagem de levedura é usada para produzir a cerveja brasileira? Justifique sua resposta.
- b) Um estudante argumentou que, para aumentar a quantidade de gás carbônico produzido, bastaria aumentar a quantidade de leveduras respirando no meio de cultura. O argumento é válido ou não? Por quê?

Resolução

- a) *As leveduras utilizadas nas cervejarias brasileiras pertencem à espécie *Sacharomyces carlsbergensis*, que apresenta uma atividade fermentativa menor, o que leva à menor produção de gás carbônico e álcool etílico.*
- b) *Sim. As leveduras são seres anaeróbios facultativos. Em presença de O_2 , a respiração é aeróbia e na ausência deste, realiza fermentação. O aumento da biomassa de leveduras levaria à maior produção de CO_2 , desde que os outros fatores fossem mantidos em níveis ótimos e constantes.*

Observação: questão mal formulada.

2



Considere dois genes e seus respectivos alelos: **A** e **a**; **B** e **b**.

Em termos de localização cromossômica, explique o que significa dizer que esses dois genes

- a) segregam-se independentemente na formação dos gametas.
- b) estão ligados.

Resolução

- a) *Os genes segregam-se independentemente quando estão situados em pares de cromossomos diferentes.*
- b) *Os genes ligados situam-se no mesmo cromossomo.*

3

Ao comeremos um pinhão e uma castanha-do-pará, ingerimos o tecido de reserva do embrião de uma gimnosperma (araucária) e de uma angiosperma (castanheira), respectivamente. Pinhão e castanha-do-pará são sementes.

- a) O órgão que deu origem ao pinhão e à castanha-do-pará, na araucária e na castanheira, é o mesmo? Justifique.
- b) A origem dos tecidos de reserva do embrião do pinhão e da castanha-do-pará é a mesma? Justifique.

Resolução

- a) *Sim. Gimnospermas e angiospermas produzem sementes resultantes do desenvolvimento de óvulos fecundados.*
- b) *Não. As araucárias produzem os pinhões com tecido de reserva haplóide resultante do desenvolvimento do gametófito feminino (megaprótalo). As castanheiras produzem sementes com reservas triplóides contidas no endosperma secundário ou albúmen.*

4

A tabela mostra os efeitos da ação de dois importantes componentes do sistema nervoso humano.

X	Y
Contração da pupila	Dilatação da pupila
Estímulo da salivação	Inibição da salivação
Estímulo do estômago e dos intestino	Inibição do estômago e intestinos
Contração da bexiga urinária	Relaxamento da bexiga urinária
Estímulo à ereção do pênis	Promoção da ejaculação

- a) A que correspondem X e Y?
- b) Em uma situação de emergência, como a fuga de assalto, por exemplo, qual deles será ativado de maneira mais imediata? Forneça um outro exemplo, diferente da tabela, da ação desse componente do sistema nervoso.

Resolução

- a) *X corresponde ao sistema nervoso autônomo, no caso, o ramo parassimpático. Y corresponde ao sistema nervoso autônomo simpático.*
- b) *Em situações de perigo (emergência), será ativado de maneira mais imediata o sistema nervoso simpático. O sistema simpático aumenta os batimentos cardíacos, a pressão arterial e provoca vasoconstrição periférica.*



Em 1839, um único exemplar de figo-da-índia, planta da família dos cactos, foi levado do Brasil para a Austrália, onde essas plantas não existiam. Em 40 anos, quatro milhões de hectares daquele país estavam cobertos pela planta e, depois de 90 anos, essa área era de 25 milhões de hectares. No final da década de 1990, algumas plantas de figo-da-índia foram trazidas da Austrália para o Brasil para que seu pólen fosse inoculado em flores das plantas daqui, visando aproveitamento econômico dos resultados. Depois de algum tempo, porém, verificou-se que essas plantas inoculadas com pólen das plantas australianas não produziam frutos.

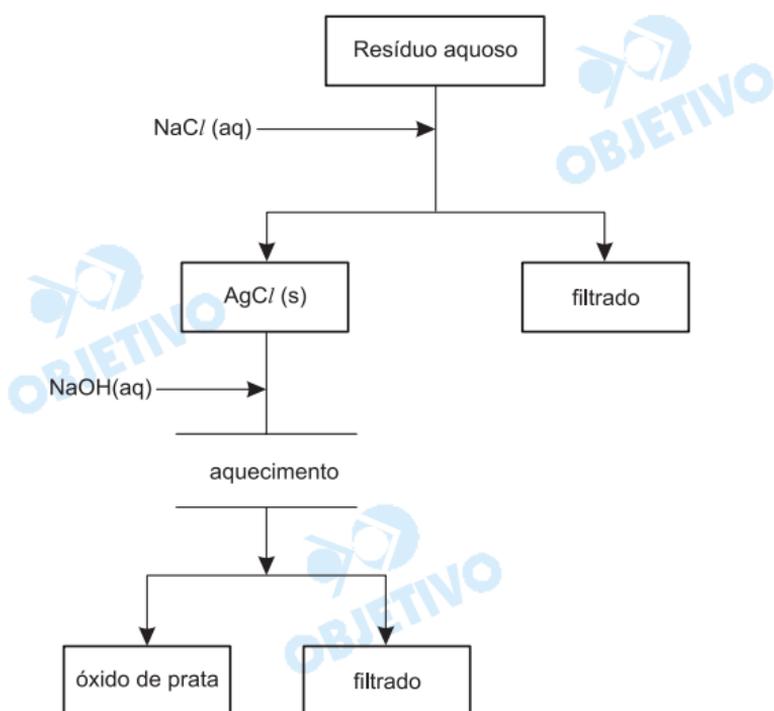
- a) Considerando que clima, solo e condições físicas do ambiente entre a Austrália e o Brasil são semelhantes e que ambos possuem biomas com características parecidas, elabore uma hipótese para explicar por que na Austrália o figo-da-índia invadiu uma área tão grande, enquanto aqui isso não ocorreu.
- b) Como você explica que plantas brasileiras submetidas à polinização com pólen de plantas australianas, no final da década de 1990, não tenham produzido frutos?

Resolução

- a) *Ausência de predadores e número reduzido de parasitas, além de um ambiente favorável à polinização, fecundação e formação de sementes.*
- b) *A não-formação de frutos decorre da ausência de fecundação. O isolamento geográfico e a seleção natural diversificadora levou ao isolamento reprodutivo entre as plantas australianas e brasileiras.*

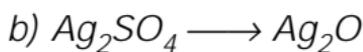
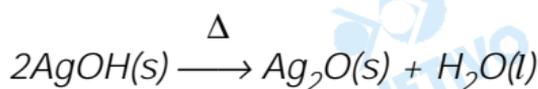
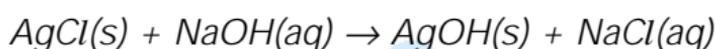
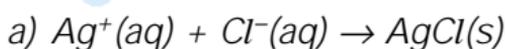
A prata é um elemento muito utilizado nas indústrias de fotografia e imagem e seu descarte no meio ambiente representa risco para organismos aquáticos e terrestres. Por ser um dos metais com risco de escassez na natureza, apresenta um alto valor agregado. Nesses aspectos, a recuperação da prata de

resíduos industriais e de laboratórios associa a mitigação do impacto ambiental à econômica. O fluxograma representa o tratamento de um resíduo líquido que contém íons de prata (Ag^+) e de sulfato (SO_4^{2-}) em meio aquoso.



- a) Escreva as equações das reações, devidamente balanceadas, da formação do cloreto de prata e do óxido de prata.
- b) No tratamento de um resíduo aquoso que continha 15,6 g de sulfato de prata, foram obtidos 8,7 g de óxido de prata.
Calcule o rendimento em Ag_2O deste processo.

Resolução



$312\text{g} \quad \text{-----} \quad x \quad 232\text{g}$

$15,6\text{g} \quad \text{-----} \quad 8,7\text{g}$

$x = 0,75 \therefore 75\%$

Dois experimentos foram realizados em um laboratório de química.

Experimento 1: Três frascos abertos contendo, separadamente, volumes iguais de três solventes, I, II e III, foram deixados em uma capela (câmara de exaustão). Após algum tempo, verificou-se que os volumes dos solventes nos três frascos estavam diferentes.



Experimento 2: Com os três solventes, foram preparadas três misturas binárias. Verificou-se que os três solventes eram miscíveis e que não reagem quimicamente entre si. Sabe-se, ainda, que somente a mistura (I + III) é uma mistura azeotrópica.

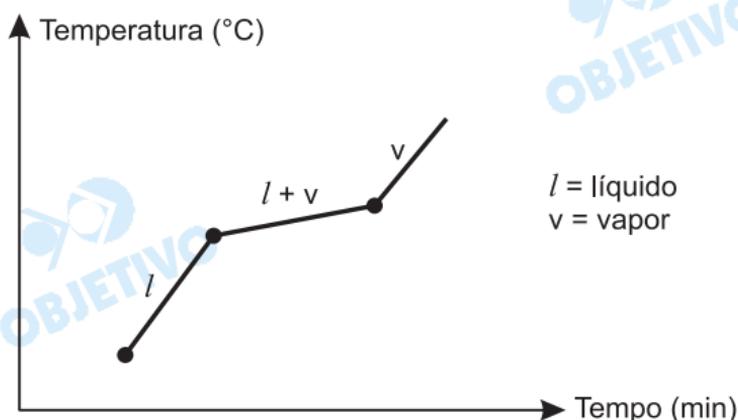
- Coloque os solventes em ordem crescente de pressão de vapor. Indique um processo físico adequado para separação dos solventes na mistura (I + II).
- Esboce uma curva de aquecimento (temperatura x tempo) para a mistura (II + III), indicando a transição de fases. Qual é a diferença entre as misturas (II + III) e (I + III) durante a ebulição?

Resolução

a) O solvente mais volátil apresenta maior pressão de vapor, assim a ordem crescente de volatilidade dos solventes é: $I < III < II$.

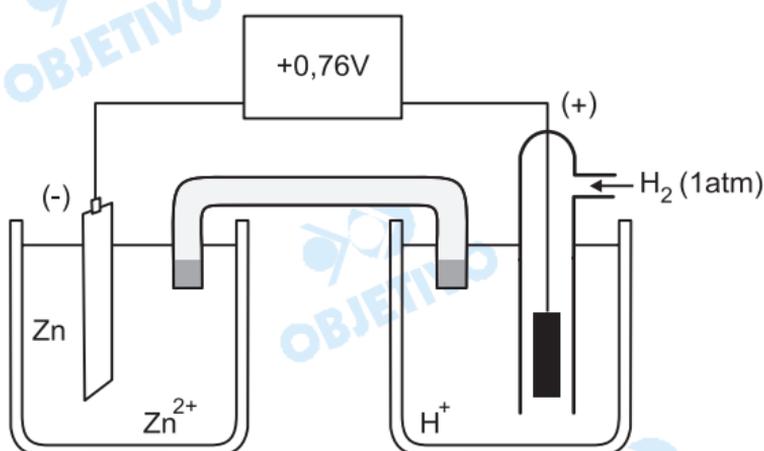
Um método para separar os solventes da mistura (I + II) seria a destilação fracionada.

b) Curva de aquecimento para a mistura (II + III):



Durante a ebulição, a temperatura da mistura (I + III) fica constante (azeótropo); no caso da mistura (II + III), a temperatura não fica constante.

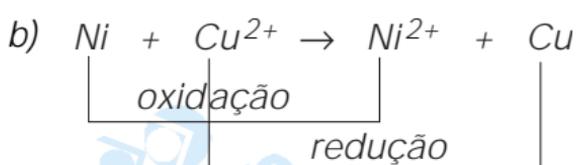
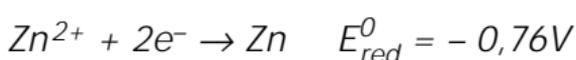
A figura apresenta uma célula voltaica utilizada para medida de potencial de redução a 25°C. O eletrodo padrão de hidrogênio tem potencial de redução igual a zero. A concentração das soluções de íons H^+ e Zn^{2+} é de 1,00 mol/L.



Utilizando, separadamente, placas de níquel e de cobre e suas soluções Ni^{2+} e Cu^{2+} , verificou-se que Ni e Cu apresentam potenciais padrão de redução respectivamente iguais a $-0,25\text{ V}$ e $+0,34\text{ V}$.

- a) Escreva as equações de redução, oxidação e global e determine o valor do potencial padrão de redução do Zn.
- b) Para a pilha de Ni e Cu, calcule a ddp (diferença de potencial) e indique o eletrodo positivo.

Resolução

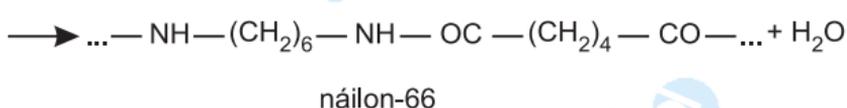
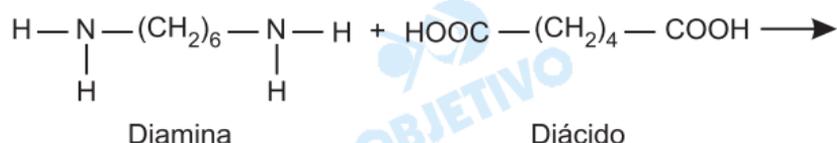
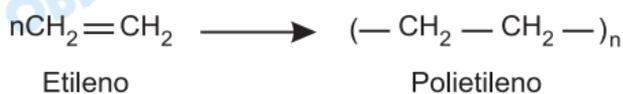


$$\Delta E = E_{maior} - E_{menor}$$

$$\Delta E = +0,34V - (-0,25V)$$

$$\Delta E = +0,59V$$

Os polímeros fazem parte do nosso cotidiano e suas propriedades, como temperatura de fusão, massa molar, densidade, reatividade química, dentre outras, devem ser consideradas na fabricação e aplicação de seus produtos. São apresentadas as equações das reações de obtenção dos polímeros polietileno e náilon-66.



- a) Quanto ao tipo de reação de polimerização, como são classificados os polímeros polietileno e náilon-66?
- b) A medida experimental da massa molar de um polímero pode ser feita por osmometria, técnica que envolve a determinação da pressão osmótica (π) de uma solução com uma massa conhecida de soluto. Determine a massa molar de uma amostra de 3,20 g de polietileno (PE) dissolvida num solvente adequado, que em 100 mL de solução apresenta pressão osmótica de $1,64 \times 10^{-2}$ atm a 27°C .

Dados: $\pi = i R T M$, onde: i (fator de van't Hoff) = 1

$R = 0,082 \text{ atm}\cdot\text{L}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

$T =$ temperatura Kelvin

$M =$ concentração em $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

Resolução

- a) O polietileno é um polímero de adição e o náilon-66 é um polímero de condensação (moléculas bifuncionais que reagem, com saída de água).
- b) Cálculo da massa molar de polietileno (PE):

$$\pi = i \cdot R \cdot T \cdot M, \text{ em que } M = \frac{m}{\bar{M} \cdot V}$$

$$1,64 \cdot 10^{-2} \text{ atm} = 1 \cdot 0,082 \frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{K}\cdot\text{mol}} \cdot 300 \text{ K} \cdot \frac{3,20 \text{ g}}{\bar{M} \cdot 0,1 \text{ L}}$$

$$\boxed{\bar{M} = 48\,000 \text{ g/mol}} \quad (\bar{M} : \text{massa molar})$$

Depois de voltar a se consolidar no mercado brasileiro de combustíveis, motivado pelo lançamento dos carros bicombustíveis, o álcool pode se tornar também matéria-prima para a indústria química, para substituir os insumos derivados do petróleo, cujos preços do barril alcançam patamares elevados no mercado internacional. Algumas empresas não descartam a possibilidade de utilizar, no futuro próximo, a alcoolquímica no lugar da petroquímica. As mais atrativas aplicações do álcool na indústria química, porém, serão voltadas à produção de compostos oxigenados, como o ácido acético, acetato de etila e butanol. Na tabela, são apresentadas algumas propriedades do 1-butanol e de certo álcool X. Os produtos da oxidação destes álcoois *não* pertencem à mesma classe de compostos orgânicos.

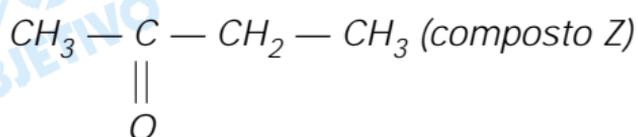
Propriedades	1-butanol	X
temperatura de ebulição (°C)	118	99
massa molar (g/mol ⁻¹)	74	74
produto da oxidação completa com KMnO ₄ (aq) em meio ácido (H ₂ SO ₄)	ácido butanóico	Z

- a) Forneça o tipo de isomeria que ocorre entre 1-butanol e o composto X. Dê a fórmula estrutural do composto Z.
- b) Escreva a equação balanceada da reação de oxidação do 1-butanol, sabendo-se que são produzidos ainda K₂SO₄, MnSO₄ e H₂O.

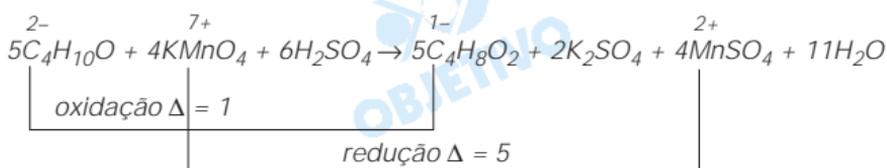
Resolução

- a) O composto X é o 2-butanol, e é isômero de posição do 1-butanol.

A fórmula estrutural da butanona:



- b) Equação balanceada da reação de oxidação:



oxidação: C₄H₁₀O: n° de e⁻ = Δ · x = 1 · 4 = 4

redução: KMnO₄: n° de e⁻ = Δ · x = 5 · 1 = 5

Na divulgação de um novo modelo, uma fábrica de automóveis destaca duas inovações em relação à prevenção de acidentes decorrentes de colisões traseiras: protetores móveis de cabeça e luzes intermitentes de freio.

Em caso de colisão traseira, "os protetores de cabeça, controlados por sensores, são movidos para a frente para proporcionar proteção para a cabeça do motorista e do passageiro dianteiro dentro de milissegundos. Os protetores [...] previnem que a coluna vertebral se dobre, em caso de acidente, reduzindo o risco de ferimentos devido ao efeito chicote [a cabeça é forçada para trás e, em seguida, volta rápido para a frente]."

As "luzes intermitentes de freio [...] alertam os motoristas que estão atrás com maior eficiência em relação às luzes de freio convencionais quando existe o risco de acidente. Testes [...] mostram que o tempo de reação de frenagem dos motoristas pode ser encurtado em média de até 0,20 segundo se uma luz de aviso piscante for utilizada durante uma frenagem de emergência. Como resultado, a distância de frenagem pode ser reduzida em 5,5 metros [aproximadamente, quando o carro estiver] a uma velocidade de 100 km/h."

(www.daimlerchrysler.com.br/noticias/Agosto/Nova_ClasseE_2006/popexpand.htm)

- Qual lei da física explica a razão de a cabeça do motorista ser forçada para trás quando o seu carro sofre uma colisão traseira, dando origem ao "efeito chicote"? Justifique.
- Mostre como foi calculada a redução na distância de frenagem.

Resolução

- Quando o carro sofre uma colisão traseira, a velocidade do carro aumenta repentinamente e, **por inércia**, a cabeça do motorista tende a permanecer com a velocidade que possuía, sendo projetada para trás em relação ao veículo e recebendo do banco uma força para frente que resulta em um impacto contra o "protetor" de cabeça.

A lei física é o Princípio da Inércia ou 1ª Lei de Newton.

- Durante o tempo de reação, o carro permanece com a velocidade que possuía.

Se o tempo de reação for encurtado em 0,20s, a distância percorrida antes de se iniciar a freada fica reduzida em um valor Δd dado por:

$$\Delta d = V \Delta T$$

V = módulo da velocidade do veículo

ΔT = redução do tempo de reação

$$\Delta d = \frac{100}{3,6} \cdot 0,20 \text{ (m)} \cong 5,5\text{m}$$



Uma das alternativas modernas para a geração de energia elétrica limpa e relativamente barata é a energia eólica. Para a avaliação preliminar da potência eólica de um gerador situado em um determinado local, é necessário calcular a energia cinética do vento que atravessa a área varrida pelas hélices desse gerador por unidade de tempo.

- a) Faça esse cálculo para obter a potência média disponível, em watts, de um gerador eólico com hélices de 2,0 m de comprimento, colocado em um lugar onde, em média, a velocidade do vento, perpendicular à área varrida pelas hélices, é de 10 m/s. Dados: área do círculo: $A = \pi r^2$ (adote $\pi = 3,1$); densidade do ar: $d_{ar} = 1,2 \text{ kg/m}^3$.
- b) Mesmo em lugares onde o vento é abundante, há momentos de calma ou em que sua velocidade não é suficiente para mover as pás do gerador. Indique uma forma para se manter o fornecimento de energia elétrica aos consumidores nessas ocasiões.

Resolução

a) A vazão do ar em relação às hélices é dada por:

$$Z = \frac{\text{Vol}}{\Delta t} = A \cdot V \rightarrow \text{Vol} = A \cdot V \cdot \Delta t \quad (1)$$

$\text{Vol} = \text{volume do ar}$

$A = \text{área varrida pelas hélices}$

$V = \text{módulo da velocidade do vento}$

$$\text{Sendo } d_{ar} = \frac{m}{\text{Vol}}, \text{ vem: } \text{Vol} = \frac{m}{d_{ar}} \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$\frac{m}{d_{ar}} = A V \Delta t \Rightarrow m = d_{ar} A V \Delta t \quad (3)$$

A potência média é dada por:

$$\text{Pot}_m = \frac{E_c}{\Delta t} = \frac{m V^2}{2 \Delta t} \quad (4)$$

Substituindo-se (3) em (4):

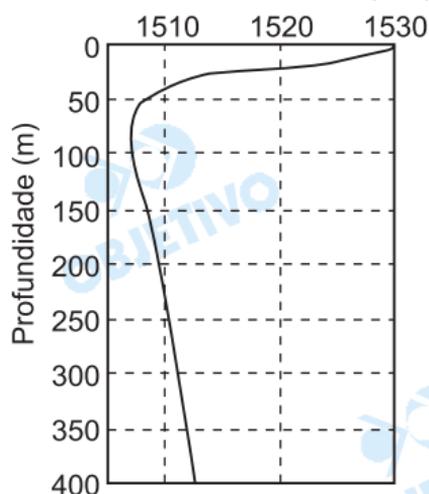
$$\text{Pot}_m = \frac{d_{ar} A V \Delta t}{2} \cdot \frac{V^2}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\text{Pot}_m = \frac{d_{ar} A V^3}{2}}$$

$$\text{Pot}_m = \frac{1,2 \cdot \pi (2,0)^2 \cdot 10^3}{2} \quad (\text{W})$$

$$\boxed{\text{Pot} \cong 7,4 \cdot 10^3 \text{ W}}$$

- b) Para os momentos de calma, quando a energia cinética do vento não é suficiente para mover as pás do gerador, devemos usar a energia previamente armazenada em baterias nos momentos em que o vento era abundante.

Velocidade do som (m/s)



O gráfico representa a profundidade (y) no mar em função da velocidade do som (v). A frequência do som é de 3000 Hz; essa curva é válida para condições determinadas de pressão e salinidade da água do mar.

a) Nessas condições, faça uma avaliação aproximada do valor

mínimo atingido pela velocidade do som no mar e da profundidade em que isso ocorre.

b) Desenhe na folha de respostas o esboço do correspondente gráfico profundidade (y) em função do comprimento de onda (λ) do som. Adote o mesmo eixo e a mesma escala para a profundidade e coloque o comprimento de onda no eixo das abscissas. Represente três valores de λ , escritos com três algarismos significativos.

Resolução

a) Do gráfico apresentado, podemos obter:

1. Velocidade mínima do som, aproximadamente: 1507m/s
2. Profundidade correspondente aproximada: 75m

b) $V = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{V}{f}$

1. Para a velocidade mínima:

$$\lambda_{\min} = \frac{1507}{3000} \text{ (m)} \Rightarrow \lambda_{\min} = 502 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

2. Para a velocidade de 1510m/s:

$$\lambda_{\min} = \frac{1510}{3000} \text{ (m)} \Rightarrow \lambda \cong 503 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

Esse valor corresponde às profundidades aproximadas de 40m e 230m.

3. Para a velocidade de 1520m/s:

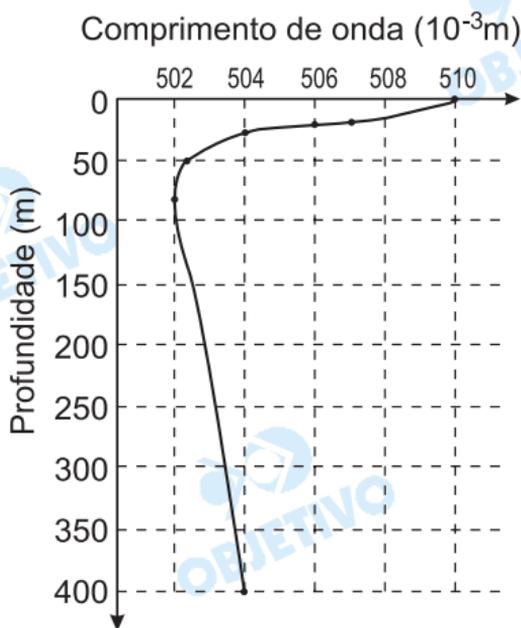
$$\lambda = \frac{1520}{3000} \text{ (m)} \Rightarrow \lambda \cong 507 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

Esse valor corresponde à profundidade aproximada de 20m.

4. Para a velocidade de 1530m/s:

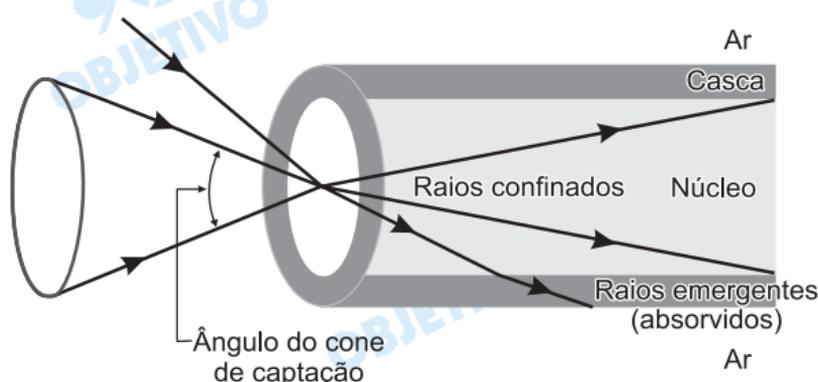
$$\lambda = \frac{1530}{3000} \text{ (m)} \Rightarrow \lambda \cong 510 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

Esse valor corresponde à superfície da água.





A fibra óptica possibilita transporte da luz ou de outra radiação eletromagnética por meio do seu confinamento, decorrente da reflexão total dessas radiações entre o núcleo e a casca da fibra. Há vários tipos de fibras ópticas, a figura representa um deles.



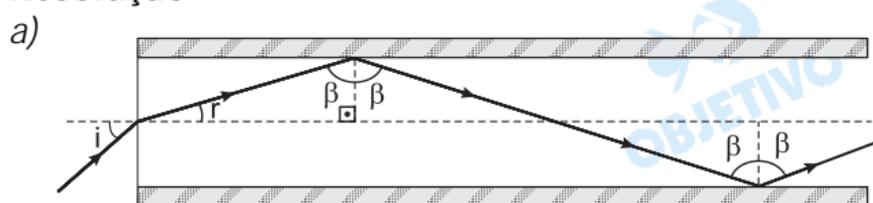
Três fatores são relevantes para o estudo desse tipo de fibra óptica: o ângulo de recepção, α_r , igual à metade do ângulo do cone de captação, o índice de refração do núcleo, n_n , e o índice de refração da casca, n_c . Neste caso, são dados:

$$\alpha_r = 48,6^\circ; n_n = 1,50 \text{ e } n_c = 1,30.$$

- Faça no caderno de respostas a figura de um raio de luz que incida na fibra dentro do cone de captação e que se reflita pelo menos duas vezes na superfície interior da casca.
- Determine o ângulo máximo de refração na face de entrada da fibra, para o qual não haja emergência da luz para a casca (a fibra está imersa no ar; $n_{ar} = 1,00$).

Dado: $\text{sen } 48,6^\circ = 0,750$; a resposta pode ser dada pelo arco-seno do ângulo pedido.

Resolução



$$\text{sen } L = \frac{n_c}{n_n} = \frac{1,30}{1,50} = 0,87 \Rightarrow L = 60^\circ$$

Na figura: $\beta > 60^\circ$; $i > r$; $i \leq \alpha_r$

b) Usando-se a Lei de Snell-Descartes:

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_n \cdot \text{sen } r$$

Quando $\text{sen } i = \text{sen } 48,6$ (valor máximo), o valor de $\text{sen } r$ também será máximo.

$$1,0 \cdot \text{sen } 48,6^\circ = 1,50 \cdot \text{sen } r$$

$$1,0 \cdot 0,750 = 1,50 \cdot \text{sen } r$$

$$\text{sen } r = 0,5$$

$$r = 30^\circ$$

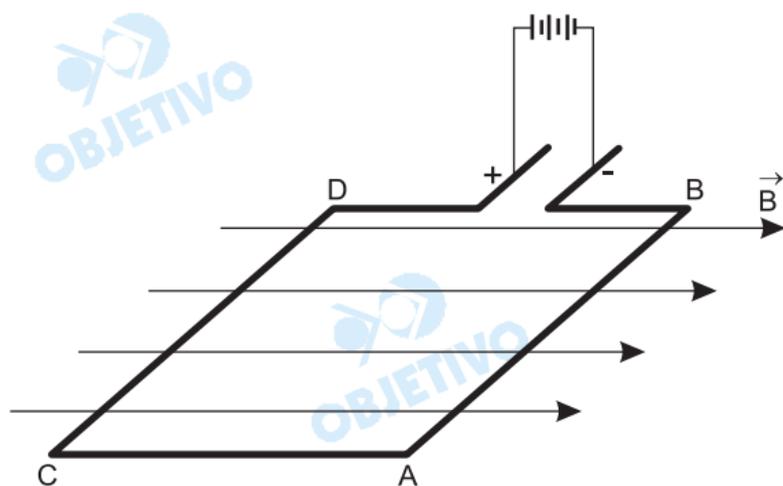
Nota: Podemos responder ao item (b) observando na figura que quando $\beta = L = 60^\circ$, resulta $r = 30^\circ$ (ângulo máximo de refração para que não haja emergência).

Respostas: a) figura

b) 30°



A figura mostra uma espira retangular imersa em um campo magnético uniforme, elemento básico de um motor elétrico de corrente contínua.



O plano da espira é paralelo ao vetor campo magnético \vec{B} . A extremidade da espira junto ao ponto D está ligada ao pólo positivo da bateria e a extremidade B ao pólo negativo; a corrente percorre o circuito no sentido de D para B.

São dados:

- intensidade da corrente que percorre a espira:
 $i = 0,80 \text{ A}$;
- resistência do fio no trecho DCAB: $R = 2,5 \ \Omega$;
- módulo do vetor campo magnético: $B = 0,50 \text{ T}$;
- comprimento dos lados da espira:
 $AB = CD = 0,050 \text{ m}$.

Determine:

- a) a diferença de potencial entre os pontos D e B.
- b) o módulo da força magnética que atua em um dos lados, AB ou CD.

Resolução

a) Da 1ª Lei de Ohm, vem:

$$U = R \cdot i$$

$$U = 2,5 \cdot 0,80 \text{ (V)}$$

$$U = 2,0 \text{ V}$$

b) O módulo da força magnética que atua em AB ou CD será dado por:

$$F_{\text{mag}} = B \cdot i \cdot \ell \cdot \text{sen } \theta$$

$$F_{\text{mag}} = 0,50 \cdot 0,80 \cdot 0,050 \cdot \text{sen } 90^\circ \text{ (N)}$$

$$\text{Assim: } F_{\text{mag}} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Nota: B é o módulo do vetor indução magnética e não do campo magnético \vec{H} . A relação entre \vec{B} e \vec{H} é $\vec{B} = \mu \vec{H}$, em que μ é a permeabilidade magnética do meio.

Respostas: a) 2,0V

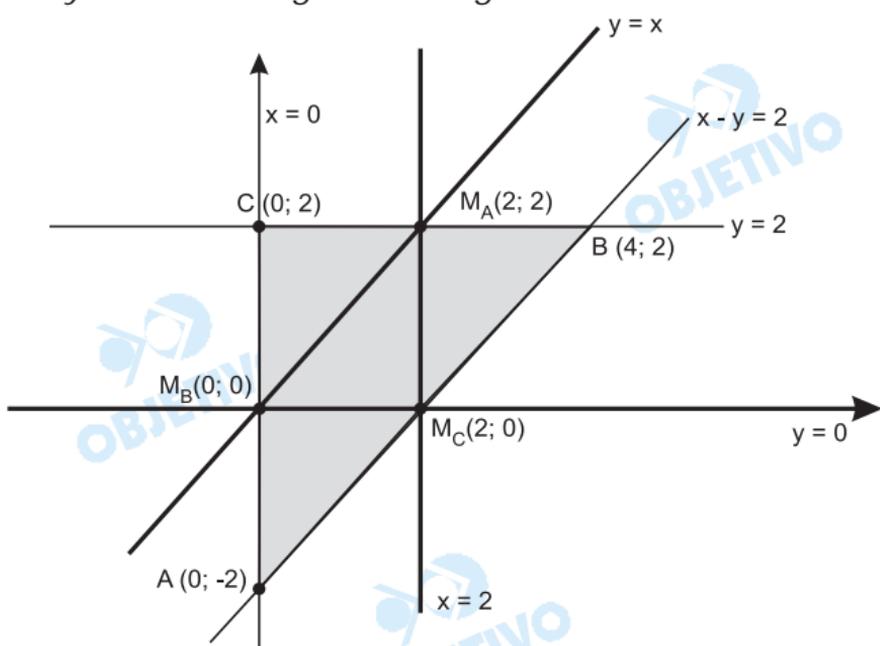
b) $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}$

Em um plano cartesiano, seja T o triângulo que delimita a região definida pelas inequações $y \leq 2$, $x \geq 0$ e $x - y \leq 2$.

- Obtenha as equações de todas as retas que são eqüidistantes dos três vértices do triângulo T .
- Obtenha a equação da circunferência circunscrita ao triângulo T , destacando o centro e o raio.

Resolução

A região definida pelas inequações $y \leq 2$, $x \geq 0$ e $x - y \leq 2$ é o triângulo T da figura.



O ponto A é a intersecção das retas de equação $x = 0$ e $x - y = 2$ e, portanto, $A(0; -2)$.

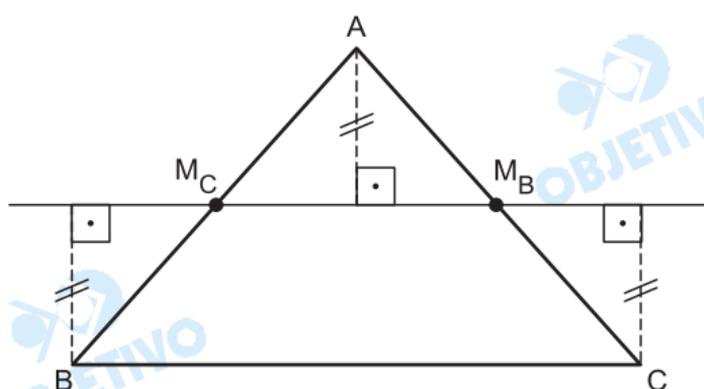
O ponto C é a intersecção das retas de equação $x = 0$ e $y = 2$ e, portanto, $C(0; 2)$.

Analogamente, o ponto B é obtido de $x - y = 2$ e $y = 2$ e, portanto, $B(4; 2)$.

A inequação $x - y \leq 2$ representa o semiplano limitado pela reta de equação $x - y = 2$ e que contém a origem, pois $0 - 0 \leq 2$.

O ponto M_C é médio de \overline{AB} e, portanto, $M_C(2; 0)$; M_B é médio de \overline{AC} e, portanto, $M_B(0; 0)$ e M_A é médio de \overline{BC} e, portanto, $M_A(2; 2)$.

- Cada reta eqüidistante dos vértices do triângulo contém os pontos médios de dois lados do triângulo, conforme se vê na figura.



A reta que contém os pontos M_A e M_C tem equação $x = 2$, a que contém os pontos M_B e M_C tem equação $y = 0$ e a que contém os pontos M_A e M_B tem equação $y = x$.

b) A circunferência circunscrita ao triângulo retângulo T tem centro $M(2; 0)$ e raio $r = 2\sqrt{2}$.

A sua equação é

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 8$$

Respostas: a) $x = 2$, $y = 0$ e $y = x$

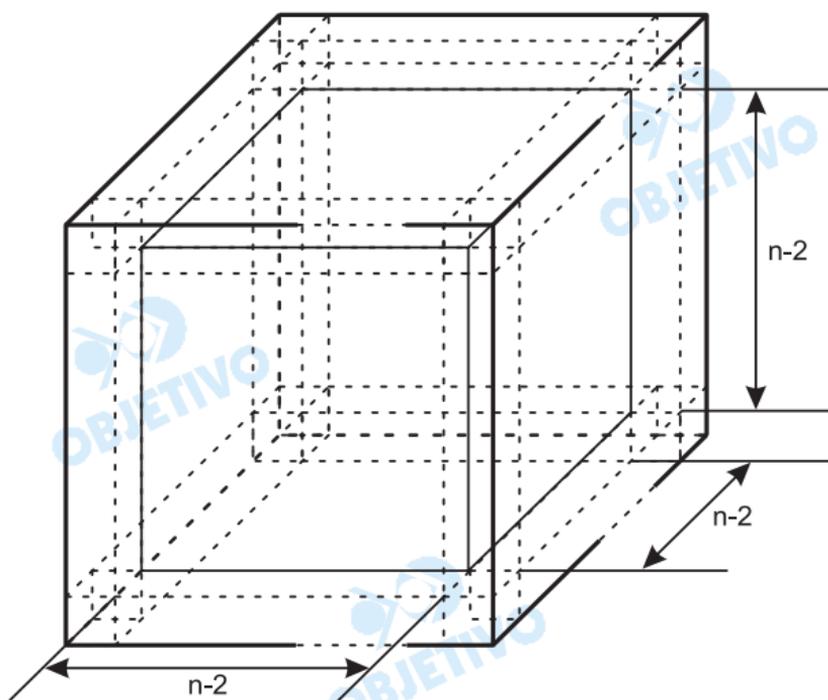
b) $(x - 2)^2 + y^2 = 8$



Colocam-se n^3 cubinhos de arestas unitárias juntos, formando um cubo de aresta n , onde $n > 2$. Esse cubo tem as suas faces pintadas e depois é desfeito, separando-se os cubinhos.

- Obtenha os valores de n para os quais o número de cubinhos sem nenhuma face pintada é igual ao número de cubinhos com exatamente uma face pintada.
- Obtenha os valores de n para os quais o número de cubinhos com pelo menos uma face pintada é igual a 56.

Resolução



Existem:

- $6(n - 2)^2$ cubinhos com apenas uma face pintada (parte central das faces do cubo).
- $12(n - 2)$ cubinhos com duas faces pintadas (nas arestas do cubo).
- 8 cubinhos com três faces pintadas (nos vértices do cubo maior).
- $(n - 2)^3$ cubinhos não-pintados (no interior do cubo grande).
- Para as condições da pergunta do item (a), devemos ter

$$(n - 2)^3 = 6(n - 2)^2 \Leftrightarrow n = 8, \text{ pois } n > 2$$
- Para as condições da pergunta do item (b), devemos ter

$$6(n - 2)^2 + 12(n - 2) + 8 = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow n = 4, \text{ pois } n > 2$$

Respostas: a) 8
b) 4

Em uma cidade existem 1000 bicicletas, cada uma com um número de licença, de 1 a 1000. Duas bicicletas nunca têm o mesmo número de licença.

- a) Entre as licenças de três algarismos, de 100 a 999, em quantas delas o valor absoluto da diferença entre o primeiro algarismo e o último é igual a 2?
- b) Obtenha a probabilidade do número da licença de uma bicicleta, encontrada aleatoriamente entre as mil, não ter nenhum 8 entre seus algarismos.

Resolução

- a) *Os números de três algarismos nos quais o valor absoluto da diferença entre o primeiro e o terceiro algarismo é 2 são dos seguintes 15 tipos:*

2 □ 0,	1 □ 3,	3 □ 1,
2 □ 4,	4 □ 2,	3 □ 5,
5 □ 3,	4 □ 6,	6 □ 4,
5 □ 7,	7 □ 5,	6 □ 8,
8 □ 6,	7 □ 9,	9 □ 7,

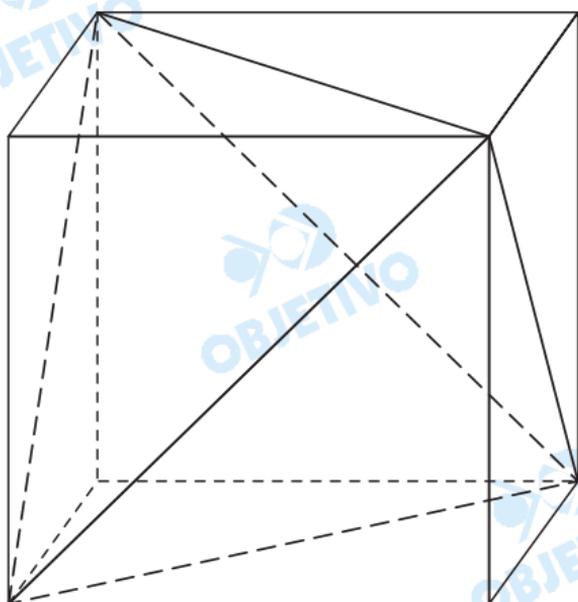
Em cada um dos 15 tipos de número, existem 10 possibilidades de escolher o algarismo das dezenas (de 0 a 9). A quantidade total de licenças é, pois, $15 \cdot 10 = 150$

- b) *A quantidade de números de 0 a 999 (que é a mesma quantidade de números de 1 a 1000) que não possuem nenhum algarismo igual a 8 é $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. A probabilidade do número da licença de uma bicicleta não conter nenhum algarismo igual a 8 é*

$$\frac{729}{1000} = \frac{72,9}{100} = 72,9\%$$

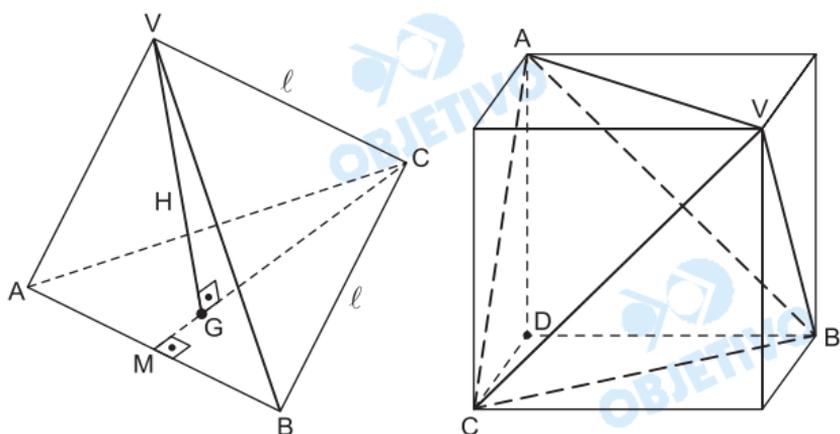
Respostas: a) 150 b) 72,9%

Quatro dos oito vértices de um cubo de aresta unitária são vértices de um tetraedro regular. As arestas do tetraedro são diagonais das faces do cubo, conforme mostra a figura.



- Obtenha a altura do tetraedro e verifique que ela é igual a dois terços da diagonal do cubo.
- Obtenha a razão entre o volume do cubo e o volume do tetraedro.

Resolução



Consideremos um tetraedro regular de arestas medindo ℓ .

- A altura \overline{CM} do triângulo equilátero ABC da base

$$\text{mede } CM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot CM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

- A altura H do tetraedro é tal que

$$VG^2 + CG^2 = VC^2 \Leftrightarrow H^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \quad (I)$$

- O volume do tetraedro regular é

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} \quad (II)$$

Agora, consideremos o cubo dado de aresta medindo 1.

- 4) Sua diagonal da face (\overline{VA}), aresta do tetraedro, mede $\sqrt{2}$ e a diagonal do cubo (\overline{VD}) mede $\sqrt{3}$.
- 5) A altura H do tetraedro $VABC$ inscrito no cubo mede $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, conforme o resultado (I).

A razão entre a altura do tetraedro e a diagonal do cubo é $\frac{H}{VD} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ e, portanto, a altura é $\frac{2}{3}$ da diagonal do cubo.

- 6) O volume do tetraedro é $\frac{(\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}$, conforme o resultado II e a razão entre o volume do

cubo e o volume do tetraedro é $\frac{V_{\text{cubo}}}{V_{\text{tetraedro}}} = \frac{1^3}{\frac{1}{3}} = 3$.

Respostas: a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e demonstração

b) 3

As medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é a_1 e a razão é $r > 0$.

- a) Se $a_1 \geq 25^\circ$ e se $r \geq 10^\circ$, obtenha o valor máximo possível para n nas condições enunciadas.
- b) Se o maior ângulo mede 160° e a razão é igual a 5° , obtenha o único valor possível para n .

Resolução

a) Por se tratar de um polígono convexo:

$$a_n < 180^\circ \Leftrightarrow a_1 + (n - 1) \cdot r < 180^\circ \quad (I)$$

Como $\{a_1; r\} \in \mathbb{R}_+^*$, para obtermos o valor máximo possível para n , devemos ter os valores mínimos possíveis para a_1 e r que, de acordo com o enunciado, são 25° e 10° , respectivamente.

$$\text{Logo, em (I): } 25^\circ + (n - 1) \cdot 10^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15^\circ + 10n < 180^\circ \Leftrightarrow 10n < 165^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n < 16,5 \Rightarrow n = 16 \text{ lados}$$

b) Sendo $a_n = 160^\circ$, $r = 5^\circ$ e S_n a soma dos ângulos internos do polígono, temos:

$$(I) \quad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$160^\circ = a_1 + (n - 1) \cdot 5^\circ \Leftrightarrow a_1 = 160^\circ - (n - 1) \cdot 5^\circ$$

$$(II) \quad \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\frac{[160^\circ - (n - 1) \cdot 5^\circ + 160^\circ] \cdot n}{2} =$$

$$= (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$325n - 5n^2 = 360n - 720^\circ$$

$$n^2 + 7n - 144 = 0 \Rightarrow n = 9, \text{ pois } n > 0$$

Respostas: a) $n = 16$

b) $n = 9$