MÓDULO DISCURSIVO

MATEMÁTICA

1

A sensação térmica é uma medida de como as pessoas sentem frio quando expostas ao vento. Uma boa estimativa para sensação térmica pode ser encontrada usando a fórmula:

(sensação térmica) = (temperatura do ar) − 0,7 × (velocidade do vento),

onde a temperatura do ar é medida em graus Fahrenheit (ºF) e a velocidade do vento é medida em milhas por hora (mph).

a) Supondo que a temperatura do ar seja de 40°F e a velocidade do vento seja de 24 mph, calcule a sensação térmica.

b) Usando a relação 5F – 9C = 160, entre as medidas de temperatura em graus Fahrenheit (F) e graus Celsius (C), expresse, em graus Celsius, a sensação térmica calculada no item a).

Resolução

a) Sensação térmica = 40 – 0,7 . 24 = 23,2°F

b) $$5F - 9C = 160 \Leftrightarrow C = \frac{5F - 160}{9}$$

Logo: $$C = \frac{5 \,.\, (23{,}2°F) - 160}{9} \cong -4{,}9°C$$

Respostas: a) 23,2°F
b) –4,9°C

Considere dois círculos concêntricos de centro O e raios diferentes.

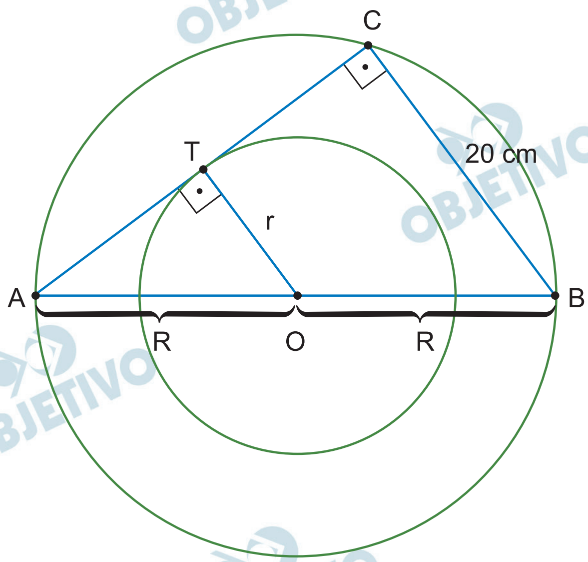
Sejam AB um diâmetro do círculo maior e AC uma corda do círculo maior que é tangente ao círculo menor no ponto T. O segmento BC mede 20 cm.

a) Faça uma figura que descreva a situação apresentada.

b) Calcule o raio do círculo menor.

Resolução

a) **Sendo R o raio da circunferência maior e r o raio da circunferência menor.**



b) **1) Se $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência maior, então o triângulo ABC inscrito é retângulo.**

2) O triângulo ATO é semelhante ao triângulo ACB, assim temos:

$$\frac{r}{20\ \text{cm}} = \frac{R}{2R} \Rightarrow r = 10\ \text{cm}$$

Resposta: a) Ver desenho
b) 10 cm

Seja M(a, b, c) a mediana dos três números reais a, b, c. Por exemplo, M(1, 2, 5) = 2 e M(100, 8, 50) = 50.

Dois números reais distintos x e y são tais que:

$$\begin{cases} M(x, y, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases}$$

Determine x e y.

Resolução

Se $x \leq y$, então

$$\begin{cases} M(x, y, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ 2y = 12 \end{cases} \text{ que é impossível.}$$

Assim sendo, obrigatoriamente $y < x$ e, portanto,

$$\begin{cases} M(y, x, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

Respostas: $x = 8$ e $y = 6$

A sequência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ é chamada de progressão harmônica quando todo termo a_n (com $n > 1$) é a média harmônica entre o antecessor e o sucessor, isto é,

$$a_n = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}.$$

Dada uma progressão harmônica $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ defina uma nova sequência $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ onde, para todo n, $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.

a) Explique por que a sequência b_n é uma progressão aritmética.

b) Calcule a_{2023} em função de b_1 e $r = b_2 - b_1$.

Resolução

a) **1) Na progressão harmônica $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots)$, temos:**

$$a_n = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}$$

2) A sequência $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$ é definida por por $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) $$b_n = \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow b_n = \frac{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{a_{n+1}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}$$ **e, portanto, a sequência $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética.**

b) **Na progressão aritmética $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$ da razão r, temos:**

$$b_{2023} = b_1 + 2022 \,.\, r \Leftrightarrow a_{2023} = \frac{1}{b_1 + 2022 \,.\, r}$$

Respostas:

a) **Demonstração**

b) $$\frac{1}{b_1 + 2022 \,.\, r}$$

No Dia das Bruxas, as 37 crianças de uma turma resolveram ir à sala da diretora da escola para pedir doces. Como sempre acontece nesses dias, elas combinaram entre si que algumas delas sempre responderiam a verdade, outras sempre responderiam mentiras e as demais, alternadamente, responderiam verdades ou mentiras. Essas, as "*alternadoras*", escolheriam, cada uma delas, arbitrariamente a primeira resposta (verdade ou mentira) e depois alternariam os valores-verdade das respostas seguintes.

A diretora da escola, como sempre, fez a todas as crianças as mesmas três perguntas nesta ordem:

"Você sempre diz a verdade?". A diretora deu um doce para cada uma das 31 crianças que responderam "sim".

"Você é uma "alternadora"?". A diretora deu um doce para cada uma das 24 crianças que responderam "sim".

"Você sempre mente?". A diretora deu um doce para cada uma das 11 crianças que responderam "sim".

a) Quantas são as crianças "*alternadoras*" que começaram dizendo a verdade?

b) Quantos doces ao todo receberam as crianças que sempre mentem?

Resolução

Sejam:

V o número de crianças que sempre dizem a verdade.
M o número de crianças que sempre mentem.
A_V o número de "alternativas" que começam dizendo a verdade.
A_M o número de "alternativas" que começam mentindo.

a) 1) O número total de crianças é 37 e, portanto, $V + M + A_V + A_M = 37$.

2) Os que responderam "sim" à primeira pergunta são 31 e, portanto, $V + M + A_M = 31$.

3) Os que responderam "sim" à segunda pergunta são 24 e, portanto, $M + A_M = 24$.

4) Os que responderam "sim" à terceira pergunta são 11 e, portanto, $\boxed{A_M = 11}$.

5) De (1) e (2), temos: $\boxed{A_V = 6}$.

6) O número total de "alternativas" é, portanto, $11 + 6 = \boxed{17}$.

7) De (3) e (4), o número total dos que mentem é $\boxed{13}$, pois $M + 11 = 24 \Leftrightarrow \boxed{M = 13}$.

8) Em (2): $V + 13 + 6 + 11 = 37 \Leftrightarrow \boxed{V = 7}$.

b) Os que <u>sempre mentem</u> receberam <u>2</u> doces cada um e, portanto, o número de doces que eles receberam é 2 . 13 = 26

Respostas: a) 6 b) 26

6

O jogo “Reduza a Palavra” é um quebra-cabeça, cujo objetivo é aplicar transformações sucessivas em uma palavra (sequências de caracteres ‘a’ e ‘b’) até reduzi-la à palavra ‘b’. As transformações permitidas são as trocas das seguintes sequências de caracteres:

1) ‘bab’ <-> ‘ba’

2) ‘abb’ <-> ‘ab’

3) ‘aba’ <-> ‘b’

Por exemplo, a palavra ‘bb’ pode ser transformada em ‘b’ através das seguintes transformações:

- De ‘bb’ para ‘abab’ (por 3), pois (b)b -> (aba)b
- De ‘abab’ para ‘aba’ (por 1), pois a(bab) -> a(ba)
- De ‘aba’ para ‘b’ (através de 3)

Note que as trocas podem ocorrer nos dois sentidos: no exemplo acima trocamos ‘b’ por ‘aba’ (por 3) e também trocamos ‘aba’ por ‘b’ (também por 3).

a) Exiba uma série de transformações que reduzam a palavra ‘baba’ até ‘b’.

b) Explique por que a palavra ‘ababa’ não pode ser reduzida até ‘b’.

Resolução

a) 1) Pela 3.ª transformação, da esquerda para a direita, temos:

$$\mathbf{b}\boxed{\mathbf{aba}} \to \mathbf{b}\boxed{\mathbf{b}} = \mathbf{bb}$$

2) Pela 3.ª transformação, da direita para a esquerda, temos:

$$\mathbf{b}\boxed{\mathbf{b}} \to \boxed{\mathbf{aba}}\,\mathbf{b} = \mathbf{abab}$$

3) Pela 1.ª transformação, da esquerda para a direita, temos:

$$\mathbf{a}\boxed{\mathbf{bab}} \to \mathbf{a}\boxed{\mathbf{ba}} = \mathbf{aba}$$

4) Pela 3.ª transformação, da esquerda para a direita, temos:

$$\boxed{\mathbf{aba}} \to \boxed{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$$

b) 1) Pela 3.ª transformação é possível acrescentar ou eliminar dois caracteres “a”.

2) Pelas duas primeiras transformações não é possível "acrescentar" ou "eliminar" um só caracter "a".

3) <u>Não</u> é <u>possível</u>, pois transformar $\boxed{\text{ababa}}$ em $\boxed{\text{b}}$.

Respostas:
a) Demonstração
b) Demonstração

No sistema de coordenadas cartesianas, considere M pontos diferentes pertencentes ao semieixo positivo das abcissas e N pontos, também diferentes, pertencentes ao semieixo positivo das ordenadas.

Traçam-se os M × N segmentos de reta que unem cada um dos M pontos do semieixo das abcissas a cada um dos N pontos do semieixo das ordenadas.

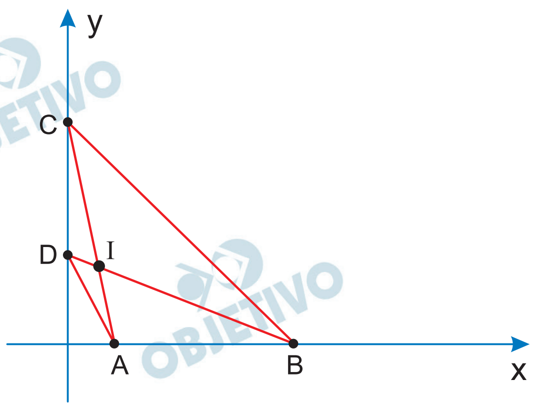
Em cada uma das duas situações a seguir, calcule o número máximo de pontos de interseção desses M × N segmentos de reta que pertençam ao interior do primeiro quadrante, isto é, os pontos de interseção que tenham as duas coordenadas maiores do que zero:

a) M = N = 2.

b) M = 8 e N = 6.

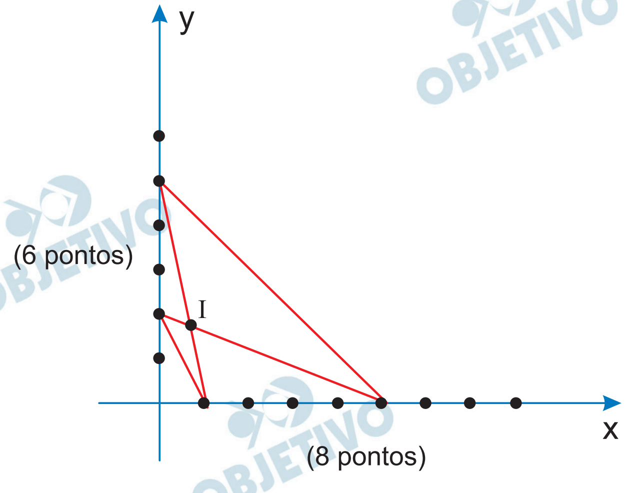
Resolução

a) M = N = 2



Ligando os dois pontos distintos do semieixo positivo das abscissas (A e B) com os dois pontos distintos do semieixo positivo das ordenadas (C e D) obtemos o quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD se interceptam no ponto I. Neste caso, portanto, existe <u>um único ponto de intersecção</u>.

b) M = 8; N = 2



Cada 4 pontos distintos, 2 no semieixo positivo das abscissas e 2 no semieixo positivo das ordenadas, determinam um único quadrilátero e um único ponto de intersecção, conforme o item (a).
O número de pontos de intersecção é, pois, igual ao número de quadriláteros. Esse número será máximo se esses pontos forem, dois a dois, distintos.
Assim sendo, o número máximo de pontos de intersecção é

$$C_{8,2} \cdot C_{6,2} = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 28 \cdot 15 = 420$$

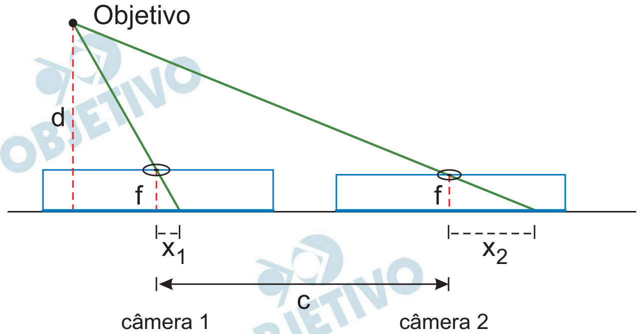
Respostas:

a) Um único ponto de intersecção.

b) O número máxio de pontos de intersecção é 420 pontos.

8

Um par de câmeras idênticas foi posicionado para realizar "visão estereoscópica", que é um procedimento que usa as imagens de duas câmeras para estimar a distância de objetos. As câmeras têm distância focal f (a distância entre o furo por onde passa a luz e o plano de imagens da câmera – o plano que contém os sensores das câmeras). Suponha que a lente no furo não mude a trajetória dos raios de luz. As câmeras foram colocadas lado a lado, com seus furos afastados por uma distância c, como indica a figura. Certo objeto está a uma distância d do plano de imagens das câmeras (o plano que contém os sensores). Na imagem da câmera 1 (a da esquerda), o objeto aparece localizado em um pixel à direita do centro da imagem e a uma distância x_1 deste centro. Já na imagem da câmera 2 (da direita), o objeto aparece localizado em um pixel também à direita do centro da imagem e a uma distância x_2 deste centro, como mostra a figura.



a) Mostre que a distância d pode ser calculada em função de c, f, x_1 e x_2, por meio da expressão $d = f \cdot \left(1 + \dfrac{c}{x_2 - x_1}\right)$.

b) Se f e c são valores pequenos, da ordem de poucos centímetros, e o objeto está a uma distância d muito grande, como a lua ou uma estrela, o que podemos dizer sobre a relação entre x_1 e x_2?

Resolução

a) Por semelhança de triângulos, temos:

$$1)\ \frac{d}{f} = \frac{y + x_1}{x_1} \Rightarrow y = \frac{d \cdot x_1}{f} - x_1$$

$$2)\ \frac{d}{f} = \frac{y + c + x_2}{x_2} \Rightarrow y = \frac{d \cdot x_2}{f} - x_2 - c$$

3) Igualando

$$\frac{d \cdot x_1}{f} - x_1 = \frac{d \cdot x_2}{f} - x_2 - c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d \cdot x_2}{f} - \frac{d \cdot x_1}{f} = x_2 - x_1 + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{f} \cdot (x_2 - x_1) = x_2 - x_1 + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{f} = 1 + \frac{c}{x_2 - x_1} \Rightarrow \boxed{d = f\left(1 + \frac{c}{x_2 - x_1}\right)}$$

b) Como

$$\frac{d}{f} \cdot (x_2 - x_1) = x_2 - x_1 + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{f} \cdot (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d}{f} - 1\right) \cdot (x_2 - x_1) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = \frac{c \cdot f}{d - f}$$

Se *f* e *c* são valores pequenos e *d* muito grande.

$\frac{c \cdot f}{d - f}$ tende a zero e, portanto, x_2 e x_1 são valores muito próximos.

Respostas:
a) Demonstração
b) Demonstração