



Matemática  
PROVA DISCURSIVA

1º Semestre

2024

15/11/2023

GRADUAÇÃO  FGV

VESTIBULAR UNIFICADO

M301

### Instruções para a Prova de MATEMÁTICA DISCURSIVA:

- Confira atentamente se os seus dados pessoais, transcritos na parte inferior desta página, estão corretos.
- Antes de iniciar a prova, verifique se o caderno contém **8 questões** e se a impressão está legível.
- Caso este caderno esteja incompleto, apresente qualquer defeito ou haja discordância quanto aos seus dados pessoais, solicite ao fiscal de aplicação da sala que tome as providências cabíveis, pois **NÃO** serão aceitas reclamações posteriores neste sentido.
- **ASSINE** seu nome única e exclusivamente no local apropriado, indicado nesta página, com caneta azul ou preta.
- Não haverá prorrogação de horário em nenhuma hipótese, desse modo, você será o responsável pela administração do tempo da prova.
- As resoluções e respostas deverão ser redigidas nos espaços destinados a elas, com letra legível e, obrigatoriamente, com caneta esferográfica de tinta azul ou preta, sendo vedado o uso de lápis, lapiseira (grafite), caneta hidrográfica fluorescente, corretor líquido e/ou borracha. **As respostas deverão apresentar a resolução completa das questões.** Não basta escrever apenas o resultado final, é necessário mostrar o raciocínio utilizado e os cálculos, quando for o caso.
- Não se identifique em nenhuma das folhas do corpo deste caderno, pois isso implicará risco de anulação.
- O candidato só poderá deixar, definitivamente, o local das provas a partir de duas horas após o início.
- **NÃO** haverá substituição deste caderno por erro cometido pelo candidato.
- O candidato é responsável pela devolução deste caderno ao fiscal de aplicação.
- Adverte-se que o candidato que se recusar a entregar este caderno, dentro do período estabelecido para realização das provas, terá automaticamente sua prova anulada.

CURSO:

DATA:

PERÍODO:

LOCAL:

COORDENAÇÃO:

CIDADE/UF:

SALA VIRTUAL:

SALA:

SEQUENCIAL:

NOME DO CANDIDATO:

CPF:

IDENTIDADE:

DATA DE NASCIMENTO:

INSCRIÇÃO:

---

Assinatura do Candidato

---

**MATEMÁTICA DISCURSIVA**

---

**QUESTÃO 1**

A sensação térmica é uma medida de como as pessoas sentem frio quando expostas ao vento. Uma boa estimativa para sensação térmica pode ser encontrada usando a fórmula:

$$(\text{sensação térmica}) = (\text{temperatura do ar}) - 0,7 \times (\text{velocidade do vento}),$$

onde a temperatura do ar é medida em graus Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ) e a velocidade do vento é medida em milhas por hora (mph).

a) Supondo que a temperatura do ar seja de  $40^{\circ}\text{F}$  e a velocidade do vento seja de 24 mph, calcule a sensação térmica.

b) Usando a relação  $5\text{F} - 9\text{C} = 160$ , entre as medidas de temperatura em graus Fahrenheit (F) e graus Celsius (C), expresse, em graus Celsius, a sensação térmica calculada no item a).

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

---

**MATEMÁTICA DISCURSIVA**

---

**QUESTÃO 2**

Considere dois círculos concêntricos de centro  $O$  e raios diferentes.

Sejam  $AB$  um diâmetro do círculo maior e  $AC$  uma corda do círculo maior que é tangente ao círculo menor no ponto  $T$ .

O segmento  $BC$  mede 20 cm.

a) Faça uma figura que descreva a situação apresentada.

b) Calcule o raio do círculo menor.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**MATEMÁTICA DISCURSIVA****QUESTÃO 3**

Seja  $M(a, b, c)$  a mediana dos três números reais  $a, b, c$ . Por exemplo,  $M(1, 2, 5) = 2$  e  $M(100, 8, 50) = 50$ .

Dois números reais distintos  $x$  e  $y$  são tais que:

$$\begin{cases} M(x, y, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases}$$

Determine  $x$  e  $y$ .

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**MATEMÁTICA DISCURSIVA****QUESTÃO 4**

A sequência  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  é chamada de progressão harmônica quando todo termo  $a_n$  (com  $n > 1$ ) é a média harmônica entre o antecessor e o

sucessor, isto é,  $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$ .

Dada uma progressão harmônica  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  defina uma nova sequência  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  onde, para todo  $n$ ,  $b_n = \frac{1}{a_n}$ .

a) Explique por que a sequência  $b_n$  é uma progressão aritmética.

b) Calcule  $a_{2023}$  em função de  $b_1$  e  $r = b_2 - b_1$ .

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

---

**MATEMÁTICA DISCURSIVA**

---

**QUESTÃO 5**

No Dia das Bruxas, as 37 crianças de uma turma resolveram ir à sala da diretora da escola para pedir doces. Como sempre acontece nesses dias, elas combinaram entre si que algumas delas sempre responderiam a verdade, outras sempre responderiam mentiras e as demais, alternadamente, responderiam verdades ou mentiras. Essas, as “*alternadoras*”, escolheriam, cada uma delas, arbitrariamente a primeira resposta (verdade ou mentira) e depois alternariam os valores-verdade das respostas seguintes.

A diretora da escola, como sempre, fez a todas as crianças as mesmas três perguntas nesta ordem:

“Você sempre diz a verdade?”. A diretora deu um doce para cada uma das 31 crianças que responderam “sim”.

“Você é uma “*alternadora*”?”. A diretora deu um doce para cada uma das 24 crianças que responderam “sim”.

“Você sempre mente?”. A diretora deu um doce para cada uma das 11 crianças que responderam “sim”.

a) Quantas são as crianças “*alternadoras*” que começaram dizendo a verdade?

b) Quantos doces ao todo receberam as crianças que sempre mentem?

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**MATEMÁTICA DISCURSIVA****QUESTÃO 6**

O jogo “Reduza a Palavra” é um quebra-cabeça, cujo objetivo é aplicar transformações sucessivas em uma palavra (sequências de caracteres ‘a’ e ‘b’) até reduzi-la à palavra ‘b’. As transformações permitidas são as trocas das seguintes sequências de caracteres:

- 1) ‘bab’  $\leftrightarrow$  ‘ba’
- 2) ‘abb’  $\leftrightarrow$  ‘ab’
- 3) ‘aba’  $\leftrightarrow$  ‘b’

Por exemplo, a palavra ‘bb’ pode ser transformada em ‘b’ através das seguintes transformações:

- De ‘bb’ para ‘abab’ (por 3), pois  $(b)b \rightarrow (aba)b$
- De ‘abab’ para ‘aba’ (por 1), pois  $a(bab) \rightarrow a(ba)$
- De ‘aba’ para ‘b’ (através de 3)

Note que as trocas podem ocorrer nos dois sentidos: no exemplo acima trocamos ‘b’ por ‘aba’ (por 3) e também trocamos ‘aba’ por ‘b’ (também por 3).

- a) Exiba uma série de transformações que reduzam a palavra ‘baba’ até ‘b’.
- b) Explique por que a palavra ‘ababa’ não pode ser reduzida até ‘b’.

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**MATEMÁTICA DISCURSIVA****QUESTÃO 7**

No sistema de coordenadas cartesianas, considere  $M$  pontos diferentes pertencentes ao semieixo positivo das abscissas e  $N$  pontos, também diferentes, pertencentes ao semieixo positivo das ordenadas.

Traçam-se os  $M \times N$  segmentos de reta que unem cada um dos  $M$  pontos do semieixo das abscissas a cada um dos  $N$  pontos do semieixo das ordenadas.

Em cada uma das duas situações a seguir, calcule o número máximo de pontos de interseção desses  $M \times N$  segmentos de reta que pertençam ao interior do primeiro quadrante, isto é, os pontos de interseção que tenham as duas coordenadas maiores do que zero:

a)  $M = N = 2$ .

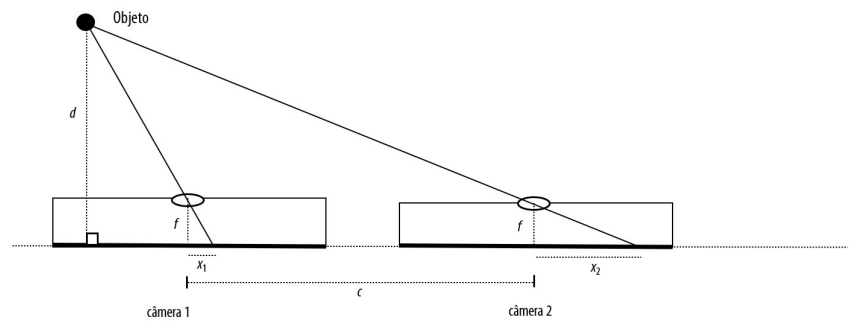
b)  $M = 8$  e  $N = 6$ .

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

MATEMÁTICA DISCURSIVA

QUESTÃO 8

Um par de câmeras idênticas foi posicionado para realizar “visão estereoscópica”, que é um procedimento que usa as imagens de duas câmeras para estimar a distância de objetos. As câmeras têm distância focal  $f$  (a distância entre o furo por onde passa a luz e o plano de imagens da câmera – o plano que contém os sensores das câmeras). Suponha que a lente no furo não mude a trajetória dos raios de luz. As câmeras foram colocadas lado a lado, com seus furos afastados por uma distância  $c$ , como indica a figura.



Certo objeto está a uma distância  $d$  do plano de imagens das câmeras (o plano que contém os sensores). Na imagem da câmera 1 (a da esquerda), o objeto aparece localizado em um pixel à direita do centro da imagem e a uma distância  $x_1$  deste centro. Já na imagem da câmera 2 (da direita), o objeto aparece localizado em um pixel também à direita do centro da imagem e a uma distância  $x_2$  deste centro, como mostra a figura.

Na imagem da câmera 1 (a da esquerda), o objeto aparece localizado em um pixel à direita do centro da imagem e a uma distância  $x_1$  deste centro. Já na imagem da câmera 2 (da direita), o objeto aparece localizado em um pixel também à direita do centro da imagem e a uma distância  $x_2$  deste centro, como mostra a figura.

a) Mostre que a distância  $d$  pode ser calculada em função de  $c, f, x_1$  e  $x_2$ , por meio da expressão  $d = f \cdot \left(1 + \frac{c}{x_2 - x_1}\right)$ .

b) Se  $f$  e  $c$  são valores pequenos, da ordem de poucos centímetros, e o objeto está a uma distância  $d$  muito grande, como a lua ou uma estrela, o que podemos dizer sobre a relação entre  $x_1$  e  $x_2$ ?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

**GRADUAÇÃO  FGV**

[www.vestibular.fgv.br](http://www.vestibular.fgv.br)

(11) 3799-7711 (São Paulo e grande São Paulo)

0800 770 0423 (demais localidades)