

# MÓDULO DISCURSIVO

## MATEMÁTICA

### 1

Eduardo tem dois caminhos, A e B, para ir de sua casa até a empresa em que trabalha. O caminho A tem 6400 metros de comprimento e o caminho B tem 4500 metros. Pelo caminho A, Eduardo consegue fazer uma velocidade média de 60 km/h; pelo caminho B, ele consegue fazer uma velocidade média de 36 km/h.

- Qual dos caminhos, A ou B, Eduardo percorre em menos tempo? **Justifique a sua resposta.**
- Qual é a diferença de tempo, em segundos, entre os dois caminhos? **Basta fornecer a resposta.**

#### Resolução

- Tem-se:

Caminho A:  $60 \text{ km/h} = 1\,000 \text{ m/min}$ .

Assim, Eduardo percorre o caminho A em  $(6\,400 \text{ m}) / (1\,000 \text{ m/min}) = 6,4 \text{ min}$ .

Caminho B:  $36 \text{ km/h} = 600 \text{ m/min}$ .

Assim, Eduardo percorre o caminho B em  $(4\,500 \text{ m}) / (600 \text{ m/min}) = 7,5 \text{ min}$ .

Obs.: Também aceitar outras contas com ou sem transformações de unidades. Por exemplo:

Caminho A:

$$(6\,400 \text{ m}) / (60 \text{ km/h}) = 106,66... \text{ m/(km/h)}$$

Caminho B:

$$(4\,500 \text{ m}) / (36 \text{ km/h}) = 125 \text{ m/(km/h)}$$

- A diferença de tempo é

$$7,5 - 6,4 = 1,1 \text{ min} = 1,1 \times 60\text{s} = 66\text{s}$$

Respostas: a) Caminho A.

b) 66s.

## 2

Em um *show* de *rock*, os adultos representam  $\frac{7}{16}$  do

total de pessoas presentes. Com a chegada de um ônibus de turismo com mais 60 pessoas, os adultos passaram a representar  $\frac{13}{30}$  do total de pessoas presentes.

- a) É possível que o número de pessoas presentes antes da chegada do ônibus de turismo fosse 160? **Justifique a sua resposta.**
- b) Qual é o número mínimo de adultos presentes, após a chegada do ônibus de turismo? **Basta fornecer a resposta.**

### Resolução

- ) Sendo  $N$  o número de pessoas presentes ao *show* antes da chegada do ônibus, como o número de

adultos é  $\frac{7}{16}$  de  $N$ , tem-se que  $N$  tem que ser

múltiplo de 16. Além disso, como após a chegada do ônibus o número de adultos é  $\frac{13}{30}$  de  $(N + 60)$

e 60 é múltiplo de 30, então  $N$  também tem que ser múltiplo de 30. Logo, como 160 não é múltiplo de 30, o número de pessoas presentes ao *show* antes da chegada do ônibus não pode ser 160.

- b) O número mínimo de adultos ocorrerá quando o número de pessoas presentes ao *show* for mínimo. Como  $N$  tem que ser múltiplo de 16 e de 30, então o valor mínimo de  $N$  é o mínimo múltiplo comum de 16 e 30, isto é, 240. Logo, após a chegada do ônibus, o número mínimo de adultos é

$$\frac{13}{30} (240 + 60) = 130.$$

Respostas: a) Não.

b) 130.

### 3

Determine a quantidade de conjuntos que podem ser formados por dois números naturais distintos entre 1 e 401, inclusive, cuja soma seja par. **Justifique a sua resposta.**

#### Resolução

Existem duas maneiras de formar um conjunto  $\{a, b\}$  de modo que  $a + b$  seja par. Ou  $a$  e  $b$  são pares ou  $a$  e  $b$  são ímpares.

O número de conjuntos  $\{a, b\}$  em que ambos são pares

$$\text{é } N_{\text{pares}} = \frac{200 \cdot 199}{2} = 19900. \text{ O número de conjuntos}$$

$\{a, b\}$  em que ambos sejam ímpares é

$$N_{\text{ímpares}} = \frac{201 \cdot 200}{2} = 20100. \text{ Portanto, o número}$$

$$\text{pedido é } N_{\text{pares}} + N_{\text{ímpares}} = 40000$$

**Resposta: 40000.**

### 4

Considere a sequência definida por:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2$
- $a_3 = 3$
- $a_n = a_{n-3} + a_{n-1}$ , para todo inteiro  $n \geq 4$

Com relação a essa sequência:

a)  $a_{2022}$  é um número par ou ímpar? **Justifique a sua resposta.**

b) E  $a_{2023}$ ? **Justifique a sua resposta.**

#### Resolução

Representando par e ímpar por “p” e “i”, respectivamente, tem-se que as paridades dos termos da sequência dada são definidas pelas paridades dos 3 primeiros termos, a saber, i, p, i. Tem-se, então:

$i, p, i, p, p, i, i, i, p, i, p, p, i, i, i, p, i, \dots$

Como se vê, as paridades se repetem de 7 em 7.

Assim, como  $2022 = 7 \times 288 + 6$ , a paridade do termo  $a_{2022}$  é a mesma do sexto termo da sequência “i, p, i, p, p, i, i”, ou seja, “i” (ímpar).

Como  $2023 = 7 \times 289$ , a paridade do termo  $a_{2023}$  é a mesma do sétimo termo da referida sequência, ou seja, “i” (ímpar).

**Respostas: a) Ímpar.**

**b) Ímpar.**

Manuel fabrica e vende um produto que, até o momento, é livre de imposto. Manuel vende cada unidade do produto por um preço  $P$ .

O governo quer passar a cobrar imposto sobre este produto. Estuda-se um valor de alíquota de  $x$ . Isto significa que um percentual  $x$  do preço de venda de cada unidade deste produto será destinado ao pagamento do imposto.

Manuel está pensando em quanto terá que reajustar o preço para incluir o imposto cobrado. Ele quer fazer um ajuste percentual  $y$  no preço, de modo que a receita que ele obterá com a venda de uma unidade do produto, após descontar o imposto, se mantenha a mesma que a atual.

- a) Se a alíquota do imposto for de  $x = 50\%$ , quanto deverá ser o reajuste  $y$ ? **Justifique a sua resposta.**
- b) Encontre uma expressão que descreva  $y$  como função de uma alíquota qualquer  $x$ , com  $0 < x < 100\%$ . **Basta fornecer a resposta.**

#### Resolução

- a) Se  $x = 50\%$ , então metade do preço final será destinado ao imposto. Portanto, a metade que sobra é a receita do Manuel, que é o preço atual. Assim, Manuel precisa dobrar o preço atual para que, após o desconto, fique com a mesma receita. Ou seja,  $y = 100\%$ .

- b) Tem-se:  $P(1 + y)(1 - x) = P \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1 - x} - 1 \text{ ou } y = \frac{x}{1 - x}$$

Respostas: a)  $100\%$ .

$$b) y = \frac{1}{1 - x} - 1 \text{ ou } y = \frac{x}{1 - x}.$$

Sejam  $f(x) = 2x - 2$  e  $g(x) = 7 - x$  e

$h(x) = \text{mínimo}(f(x), g(x))$  funções reais de variável real.  
Determine o valor máximo que a função  $h(x)$  pode atingir.

**Justifique a sua resposta.**

Obs: a função  $\text{mínimo}(a, b)$  retorna o menor valor entre  $a$  e  $b$ .

Por exemplo,  $\text{mínimo}(5, 2) = 2$  e  $\text{mínimo}(-3, 1) = -3$ .

**Resolução**

As funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são retas, respectivamente, crescente e decrescente em todo o conjunto dos reais. A interseção das duas retas acontece no ponto  $2x_i - 2 = 7 - x_i \Rightarrow x_i = 3$ . Assim, quando  $x \leq 3$  temos que  $f(x) \leq g(x)$ . Portanto, quando  $x \leq 3$ ,  $h(x) = f(x)$ . Como a função  $f(x)$  é crescente em  $x$ , o máximo que  $h(x)$  pode alcançar quando  $x \leq 3$  é exatamente quando  $x = 3$ , ou seja,  $f(3) = 4$ . Já quando  $x \geq 3$ , temos que  $g(x) \leq f(x)$  e, portanto,  $h(x) = g(x)$ . Mas  $g(x)$  é decrescente e alcança o máximo neste intervalo precisamente quando  $x = 3$ . Logo, o máximo de  $h(x)$  ocorre em  $x = 3$  e  $h(3) = f(3) = g(3) = 4$ .

Resposta: 4.

# 7

Em um torneio de tênis disputado em duas chaves, A e B, após as rodadas iniciais, restaram dois jogadores em cada chave: André e Antônio na chave A e Bruno e

Bernardo na chave B. Os dois jogos das semifinais serão disputados por jogadores da chave A contra jogadores da chave B e serão escolhidos através de sorteio.

Nos torneios de tênis todos os jogos são eliminatórios e não há empates. No torneio em questão, a probabilidade de qualquer jogador da chave A vencer qualquer jogador da chave B é  $\frac{3}{4}$ . Além disso, a probabilidade de

Antônio vencer André é  $\frac{3}{5}$ .

- a) De quantas maneiras Antônio pode ser o campeão? **Mostre para cada uma dessas maneiras quais seriam os dois jogos das semifinais e qual seria o jogo da final.**
- b) Qual a probabilidade de Antônio ser o campeão? **Basta fornecer a resposta.**

### Resolução

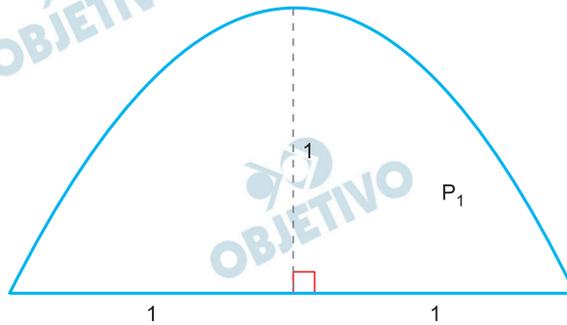
- a) 1) *Semifinais:* André x Bruno e Antônio x Bernardo;  
*Final:* Antônio x André;
- 2) *Semifinais:* André x Bruno e Antônio x Bernardo;  
*Final:* Antônio x Bruno;
- 3) *Semifinais:* André x Bernardo e Antônio x Bruno;  
*Final:* Antônio x André;
- 4) *Semifinais:* André x Bernardo e Antônio x Bruno;  
*Final:* Antônio x Bernardo.

b)  $P = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \right) = \frac{153}{320}$

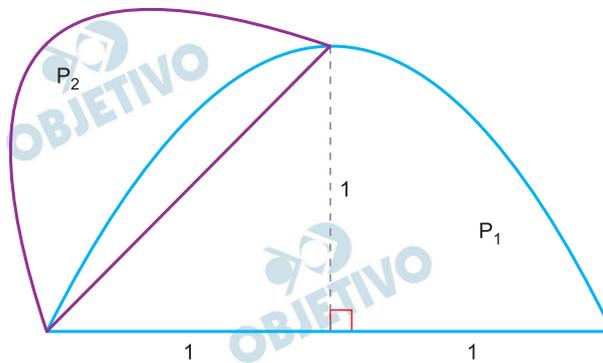
Respostas: a) 4 maneiras.

b)  $\frac{153}{320}$ .

A figura  $P_1$ , desenhada abaixo, é chamada de segmento de parábola. É limitada por um arco de parábola e um segmento de reta perpendicular ao eixo de simetria da parábola. A altura tem 1cm e a base tem 2 cm.

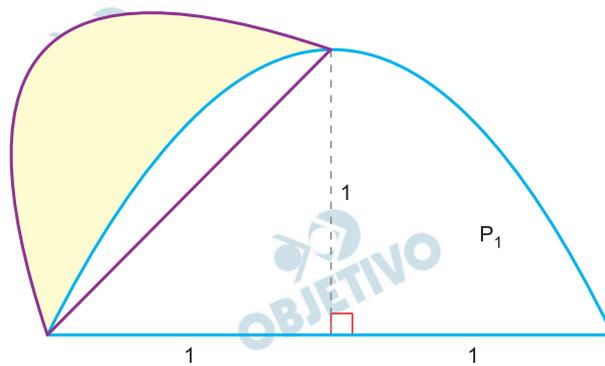


Sobre o segmento de reta que une o vértice inferior esquerdo do segmento de reta ao vértice da parábola foi construído um segmento de parábola  $P_2$ , semelhante a  $P_1$ , como mostra a figura abaixo.



Responda:

- Qual é a razão entre as áreas de  $P_1$  e  $P_2$ ? **Justifique a sua resposta.**
- Qual é a área da parte sombreada na figura abaixo? **Justifique a sua resposta.** (obs: a área sombreada corresponde aos pontos de  $P_2$  que não pertencem a  $P_1$ ).



### Resolução

- a) A razão de semelhança pode ser extraída da base de cada segmento de parábola. A base do segmento  $P_1$  é 2 e a base do segmento  $P_2$  é  $\sqrt{2}$ , já que é a hipotenusa do triângulo retângulo da figura.

Assim, a razão de semelhança é  $\frac{2}{\sqrt{2}}$  e, portanto,

a razão entre as áreas é o quadrado disto, ou seja,

$$\text{a razão procurada é } \frac{\text{Área}(P_1)}{\text{Área}(P_2)} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$$

- b) Denote por  $I$  a área da interseção dos segmentos

parabólicos. Temos que  $I = \frac{\text{Área}(P_1)}{2} - \frac{1}{2}$ , já

que é o que sobra de metade de  $P_1$  quando se subtrai o triângulo retângulo de base 1 e altura 1.

Por outro lado, a área sombreada é

$$S = \text{Área}(P_2) - I =$$

$$= \frac{\text{Área}(P_1)}{2} - \left(\frac{\text{Área}(P_1)}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Respostas: a) 2

b)  $\frac{1}{2}$ .