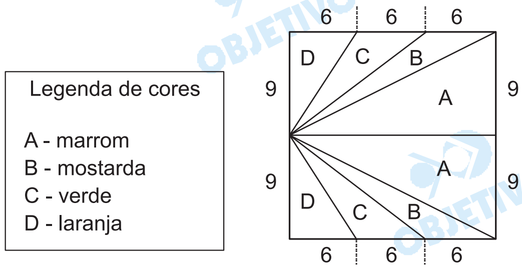
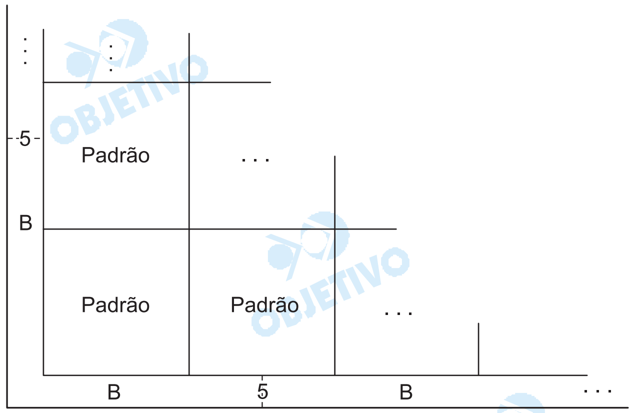
1

Um tapete deve ser bordado sobre uma tela de 2 m por 2 m, com as cores marrom, mostarda, verde e laranja, da seguinte forma: o padrão quadrado de 18 cm por 18 cm, mostrado abaixo, será repetido tanto na horizontal quanto na vertical; e uma faixa mostarda, de 5 cm de largura, será bordada em toda a volta do tapete, como na figura.





a) Qual o tamanho do maior tapete quadrado, como descrito acima, que pode ser bordado na tela? Quantas vezes o padrão será repetido?

b) Se com um novelo de lã pode-se bordar 400 cm^2, qual é o número mínimo de novelos de lã mostarda necessário para confeccionar esse tapete?

Resolução

a) O maior tapete quadrado que pode ser bordado na tela contém 100 vezes o padrão 18 cm × 18 cm (10 linhas com 10 padrões em cada linha), além da faixa de 5 cm de largura no contorno.
O tamanho do maior tapete é portanto de ***1,9 m*** *por* ***1,9 m****.*

b) 1) A área da faixa mostarda do contorno é $(1{,}9^2 - 1{,}8^2)\ m^2 = 0{,}37\ m^2 = 3700\ cm^2$

2) A área da parte mostarda dos 100 padrões é

$$100 \cdot \left(\frac{6 \cdot 9}{2} \cdot 2\right) = 5400\ cm^2$$

3) A área total bordada com a cor mostarda é $(5400 + 3700)\ cm^2 = 9100\ cm^2$

4) *O número de novelos de lã mostarda é*

$$\frac{9100}{400} = 22,75$$

5) *O número mínimo de novelos necessários (e suficientes) é* ***23****.*

Respostas: *a) 1,9 m x 1,9 m ; 100 vezes*
b) 23 novelos

Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia. Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de x?

b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

Resolução

a)

	Preço de custo	*Lucro*	*Preço de venda*
Calça	x	*20%*	$1{,}20 \,.\, x$
Camisa	$\dfrac{x}{3}$	*40%*	$1{,}40 \,.\, \dfrac{x}{3}$
Saia	$\dfrac{x}{2}$	*30%*	$1{,}30 \,.\, \dfrac{x}{2}$

Pela compra de 2 produtos de cada tipo, sem desconto, um cliente pagaria

$$2 \,.\, 1{,}20x + 2 \,.\, 1{,}40 \,.\, \frac{x}{3} + 2 \,.\, 1{,}30 \,.\, \frac{x}{2} =$$

$$= 2{,}40x + \frac{2{,}80x}{3} + 1{,}30x =$$

$$= \frac{7{,}20x + 2{,}80x + 3{,}90x}{3} = \frac{13{,}90x}{3}$$

Com 10% de desconto, o cliente paga

$$90\% \,.\, \frac{13{,}90x}{3} = 0{,}90 \,.\, \frac{13{,}90x}{3} = 4{,}17x$$

b) O preço de custo dos produtos vendidos foi

$$2 \,.\, x + 2 \,.\, \frac{x}{3} + 2 \,.\, \frac{x}{2} = \frac{6x + 2x + 3x}{3} = \frac{11x}{3}$$

O lucro obtido nessa venda foi

$$4{,}17x - \frac{11x}{3} = \frac{1{,}51x}{3}, \text{ correspondendo a}$$

$$\frac{\dfrac{1{,}51x}{3}}{\dfrac{11x}{3}} = \frac{1{,}51}{11} \simeq 0{,}1372 = 13{,}72\%$$

Respostas: *a) 4,17 . x* *b) 13,72%*

Uma função f satisfaz a identidade f(ax) = af(x) para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que f(4) = 2. Considere ainda a função g(x) = f(x – 1) + 1 para todo o número real x.

a) Calcule g(3).

b) Determine f(x), para todo x real.

c) Resolva a equação g(x) = 8.

Resolução

(I) $f(ax) = a\,f(x),\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $f(4) = 2$

(III) $g(x) = f(x-1) + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

a) 1) De (I) e (II), temos

$a = 2$ *e* $x = 2 \Rightarrow f(2 \cdot 2) = 2 \cdot f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(4) = 2\,f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$

2) Em (III), $x = 3 \Rightarrow g(3) = f(2) + 1 \Rightarrow g(3) = 2$

b) Em (I), se $x = 4 \Rightarrow f(4 \cdot a) = a \cdot f(4) \Rightarrow f(4a) = 2a$

Então: $f(x) = \dfrac{x}{2}$

c) Em (III), $g(x) = \dfrac{x-1}{2} + 1 = 8 \Rightarrow x = 15$

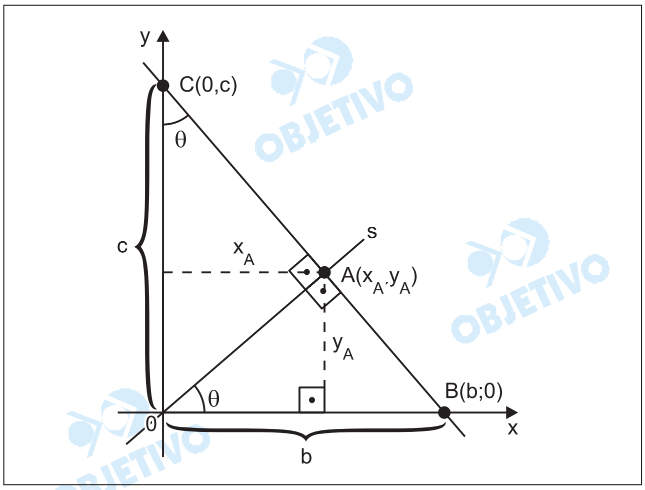
Respostas: *a)* $g(3) = 2$ *b)* $f(x) = \dfrac{x}{2}$ *c)* $x = 15$

A reta s passa pela origem O e pelo ponto A do primeiro quadrante. A reta r é perpendicular à reta s, no ponto A, e intercepta o eixo x no ponto B e o eixo y no ponto C. Determine o coeficiente angular de s se a área do triângulo OBC for o triplo da área do triângulo OAB.

Resolução

Sejam os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(b; 0)$ *e* $C(0; c)$

A partir do enunciado, temos a figura a seguir:



onde: $m_s = tg\ \theta = \dfrac{y_A}{x_A} = \dfrac{b}{c}$ (I)

Sendo $A_{\Delta OBC} = 3 \cdot A_{\Delta OAB}$, *resulta* $A_{\Delta OAC} = 2 \cdot A_{\Delta OAB}$ *e,*

portanto, $\dfrac{c \cdot x_A}{2} = 2 \cdot \dfrac{b \cdot y_A}{2} \Leftrightarrow \dfrac{b \cdot y_A}{c \cdot x_A} = \dfrac{1}{2}$ (II)

De (I) e (II), resulta

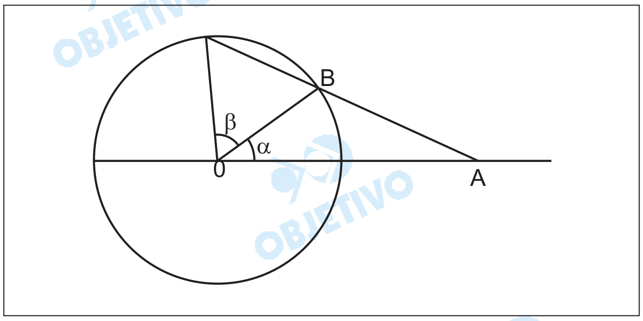
$m_s \cdot m_s = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m_s^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m_s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (pois $m_s > 0$)

Resposta: $m_s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5

Na figura abaixo, O é o centro da circunferência de raio 1, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é secante a ela, o ângulo β mede 60° e

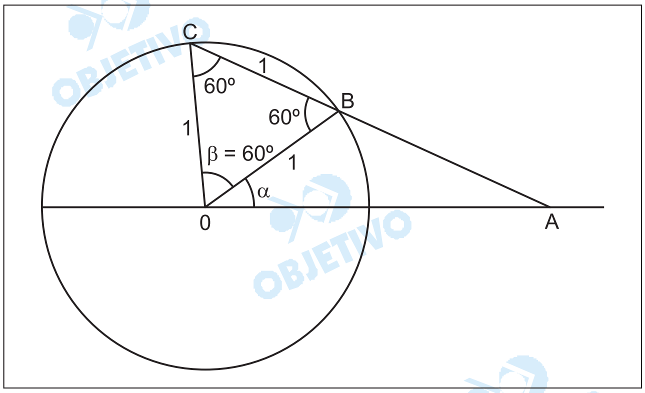
sen $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



a) Determine sen $O\hat{A}B$ em função de AB.

b) Calcule AB.

Resolução



Admitindo α < 60° vem:

a) Aplicando a lei dos senos no triângulo AOB, temos

$$\frac{AB}{\text{sen }\alpha} = \frac{1}{\text{sen }O\hat{A}B} \Leftrightarrow \frac{AB}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\text{sen }O\hat{A}B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen }O\hat{A}B = \frac{\sqrt{3}}{4\,.\,AB}$$

b) No triângulo AOB, temos

$$\alpha + O\hat{A}B = 60° \Leftrightarrow O\hat{A}B = 60° - \alpha$$

Como sen $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, *temos*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$$, *pois α é agudo.*

Assim,

$$\text{sen }O\hat{A}B = \frac{\sqrt{3}}{4\,.\,AB} \Leftrightarrow \text{sen }(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4\,.\,AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen }60°\,.\,\cos\alpha - \text{sen }\alpha\,.\,\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{4\,.\,AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4 \,.\, AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{13}-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$$

Respostas: a) $\text{sen}\ O\hat{A}B = \dfrac{\sqrt{3}}{4 \,.\, AB}$

b) $AB = \dfrac{\sqrt{13}+1}{6}$

Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é 2/3 da área de B, determine seu volume.

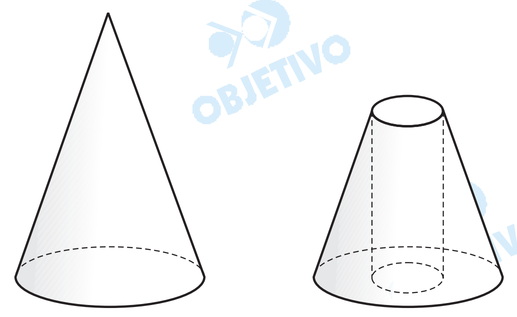
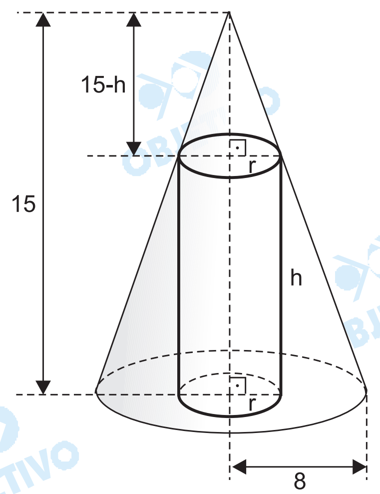


Figura 1 Figura 2

Resolução



Sendo r o raio, em centímetros, da cavidade cilíndrica e h a altura, em centímetros, dessa cavidade, tem-se:

1) $\pi\,(8^2 - r^2) = \dfrac{2}{3}\,.\,\pi\,.\,8^2 \Leftrightarrow 3\,(64 - r^2) = 128 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{64}{3} \Leftrightarrow r = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

2) $\dfrac{r}{8} = \dfrac{15 - h}{15}$

Assim, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{15 - h}{15} \Leftrightarrow h = 5(3 - \sqrt{3}\,)$ *cm*

3) O volume V da peça da figura 2, em centímetros cúbicos, é dado por

$$V = \frac{1}{3}\ \pi \ .\ 8^2\ .\ 15 - \frac{1}{3}\ .\ \pi\ r^2\ (15 - h) - \pi\ .\ r^2\ .\ h$$

Assim,

$$V = 320\pi - \frac{1}{3}\ .\ \pi\ .\ \frac{8^2}{3}\ .\ 5\sqrt{3} - \pi\ .\ \frac{8^2}{3}\ .\ 5(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

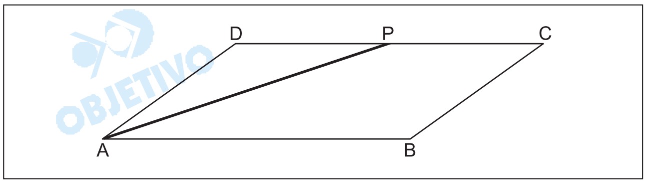
$$\Leftrightarrow V = \cancel{320\pi} - \frac{320\sqrt{3}\,\pi}{9} - \cancel{320\pi} + \frac{320\sqrt{3}\,\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{640\sqrt{3}\,\pi}{9}$$

***Resposta**: O volume do novo sólido é* $\frac{640\sqrt{3}\,\pi}{9}\ cm^3$

7

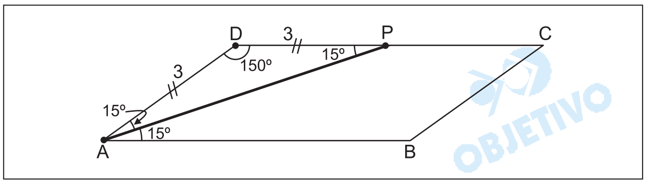
No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que AD = 3 e $D\hat{A}B = 30°$. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado $\overline{DC}$ e à bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$.



a) Calcule AP.

b) Determine AB sabendo que a área do quadrilátero ABCP é 21.

Resolução



a) No triângulo isósceles DAP, de acordo com a lei dos cossenos, tem:

$(AP)^2 = 3^2 + 3^2 - 2 . 3 . 3 . \cos 150° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AP)^2 = 18 + 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AP = \sqrt{18 + 9\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AP = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

b) A área do paralelogramo ABCD é igual à soma da área do quadrilátero ABCP com a área do triângulo APD.

Assim:

$$2 . \frac{AB . AD . \text{sen } 30°}{2} = \frac{AD . DP . \text{sen } 150°}{2} + 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 . AB}{2} = \frac{9}{4} + 21 \Leftrightarrow 6 . AB = 93 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{93}{6} \Leftrightarrow AB = \frac{31}{2}$$

***Respostas**: a) $AP = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $AB = \frac{31}{2}$*

8

Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\dfrac{z - i}{1 + i}\right) = \dfrac{1}{2}$. Lembretes: $i^2 = -1$, se $w = a + bi$, com a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\text{Im}(w) = b$.

Resolução

Se z = a + bi, com a e b reais, então:

1) $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$

2) $\dfrac{z - i}{1 + i} = \dfrac{(a + bi - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} =$

$$= \frac{a - ai + bi + b - i - 1}{2} = \frac{a + b - 1}{2} + \frac{(-a + b - 1)}{2}\,i$$

3) $\text{Im}\left(\dfrac{z - i}{1 + i}\right) = \dfrac{-a + b - 1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -a + b - 1 = 1$

$\Leftrightarrow -a + b = 2 \Leftrightarrow b = a + 2$

4) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ b = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + (a + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$

5) $a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow z = 2i$

$a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = -2$

Resposta: *z = 2i ou z = – 2*

Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + (\cos^2 a)\, y + (\text{sen}^2 a)\, z = 0 \\ x + (\cos^2 b)\, y + (\text{sen}^2 b)\, z = 0 \\ \quad (\cos^2 c)\, y + (\text{sen}^2 c)\, z = 0 \end{cases}$$

a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear.

b) Para que valores de a, b e c o sistema linear admite soluções não triviais?

c) Calcule as soluções do sistema quando $\text{sen}^2 a = 1$ e $\cos^2 c = 1/5$.

Resolução

a) O determinante da matriz dos coeficientes é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & \text{sen}^2 a \\ 1 & \cos^2 b & \text{sen}^2 b \\ 0 & \cos^2 c & \text{sen}^2 c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{sen}^2 a \\ 1 & 1 & \text{sen}^2 b \\ 0 & 1 & \text{sen}^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= \text{sen}^2 c + \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 c - \text{sen}^2 b = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

b) O sistema admite solução não-trivial se, e somente se, $\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, a = \pm\, \text{sen}\, b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b = a + n\pi$ ou $b = -a + n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e c qualquer.

c) Quando $\text{sen}^2 a = 1$ e $\cos^2 c = \dfrac{1}{5}$ tem-se $\cos^2 a = 0$ e $\text{sen}^2 c = \dfrac{4}{5}$. O sistema passa a ser

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + (\cos^2 b)\, y + (\text{sen}^2 b)\, z = 0 \\ \dfrac{1}{5} y + \dfrac{4}{5} z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \quad (I) \\ x + (\cos^2 b)\, y + (\text{sen}^2 b)\, z = 0 \quad (II) \\ y = -4z \quad (III) \end{cases}$$

Da equação (II), tem-se
$-z + (\cos^2 b)(-4z) + (\text{sen}^2 b) \,.\, z = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-1 - 4\cos^2 b + \text{sen}^2 b) \,.\, z = 0 \Leftrightarrow -5\cos^2 b \,.\, z = 0$
Se $\cos^2 b \neq 0$, então $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$
Se $\cos^2 b = 0$, então z é qualquer e a solução é do tipo $(-\alpha; -4\alpha; \alpha)$, $\forall \alpha$.

***Respostas**: a) $\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$*
b) Qualquer a, b e c, tais que $b = \pm a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
c) $V = \{(0; 0; 0)\}$, se $\cos b \neq 0$
$V = \{(-\alpha; -4\alpha; \alpha)\}$, $\forall \alpha$, se $\cos b = 0$

a) Determine os pontos A e B do plano cartesiano nos quais os gráficos de $y = \frac{12}{x} - 1$ e $x + y - 6 = 0$ se interceptam.

b) Sendo O a origem, determine o ponto C no quarto quadrante que satisfaz $A\hat{O}B = A\hat{C}B$ e que pertence à reta $x = 2$.

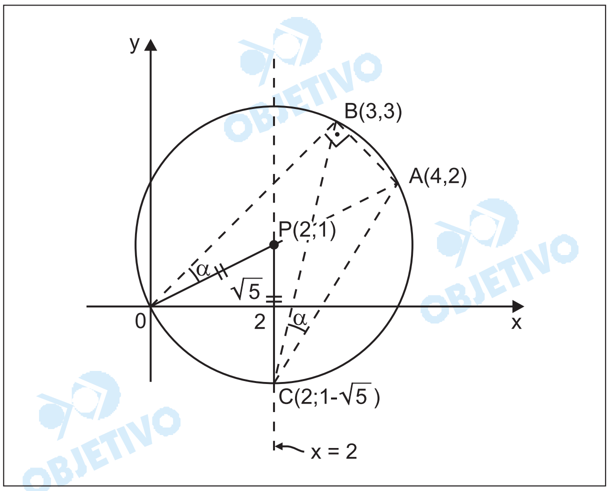
Resolução

a) $$\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} - 1 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} - 1 \\ x + \dfrac{12}{x} - 1 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12}{x} - 1 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Assim, os gráficos se interceptam nos pontos A(4;2) e B(3;3).

b)



1º) Sendo $m_{OB} = 1$ e $m_{AB} = -1$, observa-se que o triângulo OAB é retângulo em B e, portanto, o centro P da circunferência que passa pelos pontos O, A e B é o ponto médio de OA, isto é, P(2;1).

2º) Sabendo que $A\hat{O}B = A\hat{C}B$ e que o ponto C pertence à reta $x = 2$, conclui-se que esse ponto pertence à circunferência que passa pelos pontos O, A e B, e que o ponto C é o ponto de menor ordenada dessa circunferência, resultando $C(2; 1 - \sqrt{5})$.

Respostas: *a) A(4;2) e B(3;2)*
b) $C((2; 1 - \sqrt{5})$