

# M.01

Duas empresas de entrega de mercadorias, A e B, são concorrentes. A empresa A cobra R\$ 4,00 por quilo da encomenda e mais R\$ 30,00 de taxa fixa. Já a tarifa da empresa B é de R\$ 6,00 por quilo, sem taxa fixa, para encomendas de até 30 quilos; para encomendas de mais de 30 quilos, a empresa B cobra R\$ 2,00 por quilo, mais uma taxa fixa de R\$ 120,00.

- Dê a expressão da função que descreve a tarifa cobrada pela empresa A em termos do peso  $x$  da encomenda.
- Para qual intervalo de pesos é mais barato pedir uma entrega pela empresa A do que pela empresa B?
- Um cliente solicitou duas encomendas: uma entregue pela empresa A, e outra, pela empresa B, com peso total de 200 quilos. Quais são as possíveis maneiras de distribuir esse peso entre as duas empresas, sabendo que a tarifa de entrega total foi de R\$ 850,00?

## Resolução

a) Seja  $f_A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

a função custo de A, temos

$$f_A(x) = 4 \cdot x + 30$$

custo de x quilos      taxa fixa

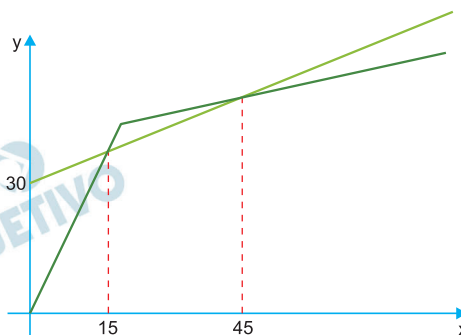
b) Seja  $f_B: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  a função custo de B

I) Do texto, temos

$$f_B(x) = \begin{cases} 6x, & x \leq 30 \\ 2x + 120, & x > 30 \end{cases}$$

II) Para  $f_A(x) = f_B(x)$ , temos  $x = 15$  ou  $x = 45$

Graficamente, temos



Assim, é mais barato comprar da empresa A para

$$15 < x < 45$$

c) I) Seja  $x$  o peso comprado na empresa A e  $y$  o peso comprado na empresa B.

Assim,

$$\begin{cases} x + y = 200 & \textcircled{1} \\ 4x + 30 + (6y) = 850 & \textcircled{2} \end{cases} \text{ ou}$$

$y \leq 30$

$$\begin{cases} x + y = 200 & \textcircled{3} \\ 4x + 30 + (2y + 120) = 850 & \textcircled{4} \end{cases}$$

$y \geq 30$

II) Na equação  $\textcircled{2}$ , temos

$$4x + 30 + 6y = 850 \Leftrightarrow 4x + 6y = 820 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 410$$

III) Na equação  $\textcircled{4}$ , temos

$$4x + 30 + 2y + 120 = 850 \Leftrightarrow 4x + 2y = 700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 350$$

IV) De II e III, temos:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + y = 350 \end{cases} \Leftrightarrow x = 150 \text{ e } y = 50$$

e

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 3y = 410 \end{cases} \Leftrightarrow x = 190 \text{ e } y = 10$$

Portanto, há duas possibilidades de distribuição

Respostas: a)  $4 \cdot x + 30$

b)  $15 < x < 45$

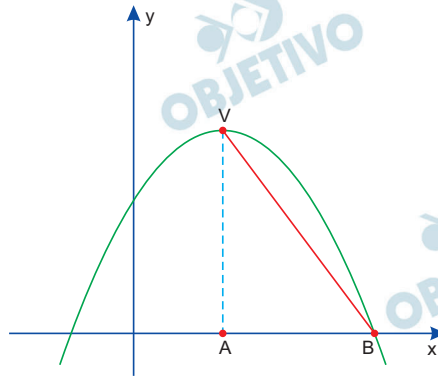
c)  $x = 150$  e  $y = 50$

$x = 190$  e  $y = 10$

## M.02

Considere  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- a) Determine os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que  $f(1) = 1$ ,  $f(0) = 0$  e  $f(-1) = 1$ .
- b) Para  $a = -1$  e  $b = 4$ , determine o valor de  $c$  de modo que a área do triângulo  $ABV$  da figura seja igual a 32 u.a., onde  $V$  é o vértice da parábola representada por  $f$ .



- c) Considere  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $g(t) = \cos t$ . Se  $a = 3$  e  $c = -8$ , determine para quais valores de  $b$  a equação  $f(g(t)) = 0$  possui ao menos uma solução real.

### Resolução

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\text{a) } \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) = 0 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

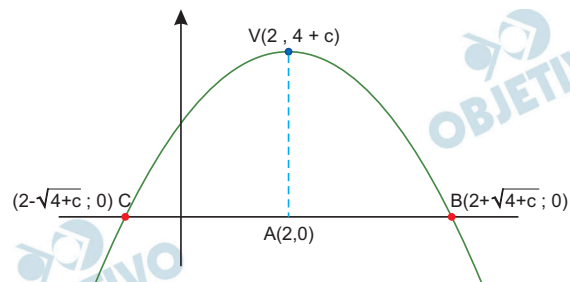
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

- b) Para  $a = -1$  e  $b = 4$ ,  $f(x) = -x^2 + 4x + c$ , cujas raízes

$$\text{são } \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4c}}{-2} = 2 \pm \sqrt{4 + c}$$

O vértice  $V$  da parábola tem abscissa

$$\frac{-4}{-2} = 2 \text{ e ordenada } -2^2 + 4 \cdot 2 + c = 4 + c$$



Sendo 32 u.a. área do  $\Delta ABV$ , e fazendo  $\sqrt{4+c} = p$ , temos:

$$\frac{(\sqrt{4+c}) \cdot (4+c)}{2} = 32 \Leftrightarrow p \cdot p^2 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^3 = 64 \Leftrightarrow p = 4$$

$$\text{Logo, } \sqrt{4+c} = 4 \Leftrightarrow 4+c = 16 \Leftrightarrow c = 12$$

c) Para  $a = 3$  e  $c = -8$ ,  $f(x) = 3x^2 + bx - 8$ .

Dada a função  $g(t) = \cos t$ , a equação

$$f(g(t)) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \cos^2 t + b \cdot \cos t - 8 = 0,$$

na variável  $\cos t$  possui raízes reais, pois

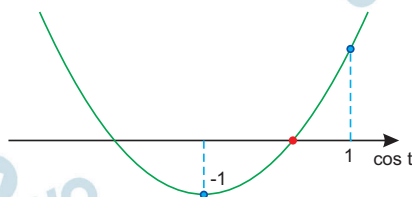
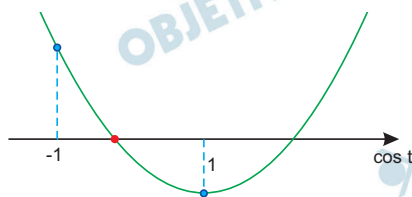
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Para que a equação  $f(g(t)) = 0$  possua ao menos uma solução real, na variável  $\cos t$ , e como

$$-1 \leq \cos t \leq 1, \text{ devemos ter } f(1) \cdot f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [3 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 8] \cdot [3 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 8] \leq 0,$$

pois:



$$\text{Logo, } (b-5) \cdot (-b-5) \leq 0 \Leftrightarrow b \leq -5 \text{ ou } b \geq 5$$

Note que  $f(-1) > 0$  e  $f(1) > 0$  não convém, pois

$$-b-5 > 0 \text{ e } b-5 > 0 \text{ é impossível.}$$

Respostas: a)  $a = 1$ ;  $b = c = 0$     b) 12

$$\text{c) } b \leq -5 \text{ ou } b \geq 5$$

## M.03

Considerando  $A = \{1,2,3,4\}$  e  $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,

- quantas funções  $f: A \rightarrow A$  (não necessariamente sobrejetoras) existem?
- quantas são as funções  $f: B \rightarrow B$  que satisfazem  $f(f(n)) = n$ , para todo  $n \in B$ ?
- escolhendo aleatoriamente uma função  $f: B \rightarrow B$  bijetora, qual é a probabilidade de  $f$  ter ao menos um ponto fixo?

### Note e Adote:

Dizemos que  $n \in B$  é um ponto fixo de  $f$  se  $f(n) = n$ .

### Resolução

- Considerando os elementos do domínio, temos:  
 $f(1)$ : 4 possibilidades  
 $f(2)$ : 4 possibilidades  
 $f(3)$ : 4 possibilidades  
 $f(4)$ : 4 possibilidades  
Assim existem  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$  funções possíveis.

- Seja  $f(n) = k$ . Assim, temos:

$$f(f(n)) = n \Leftrightarrow f(k) = n$$

Podemos separar nos seguintes casos:

- 6 pontos fixos

$(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)$

$C_{6;6} = 1$  função

- 4 pontos fixos e 1 dupla de valores diferentes.

Exemplo:

$(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 6), (6; 5)$

$C_{6;4} \cdot C_{2;2} = 15 \cdot 1 = 15$  funções

- 2 pontos fixos e 2 duplas de valores diferentes.

Exemplo:

$(1; 1), (2; 2), (3; 4), (4; 3), (5; 6), (6; 5)$

$C_{6;2} \cdot \frac{C_{4;2} \cdot C_{2;2}}{2!} = 15 \cdot \frac{6 \cdot 1}{2} = 45$  funções

IV) 3 duplas de valores diferentes.

Exemplo:

(1; 2), (2; 1), (3; 4), (4; 3), (5; 6), (6; 5)

$$\frac{C_{6;2} \cdot C_{4;2} \cdot C_{2;2}}{3!} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 1}{6} = 15 \text{ funções}$$

Assim o total de funções é  $1 + 15 + 45 + 15 = 76$

c) A função  $f(x)$  não admite nenhum ponto fixo, quando  $f(n) \neq n, \forall n \in B$ .

Existem

$$6! \cdot \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \right) =$$

= 265 maneiras.

Para que  $f(x)$  seja bijetora, temos que  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$  e  $f(6)$  precisam ser todos distintos entre si. Assim, temos um total de  $P_6 = 6! = 720$  funções bijetoras possíveis, das quais 265 não possuem nenhum ponto fixo e 455 com pelo menos um ponto fixo. Assim, a probabilidade desejada é

$$\frac{455}{720} = \frac{91}{144}$$

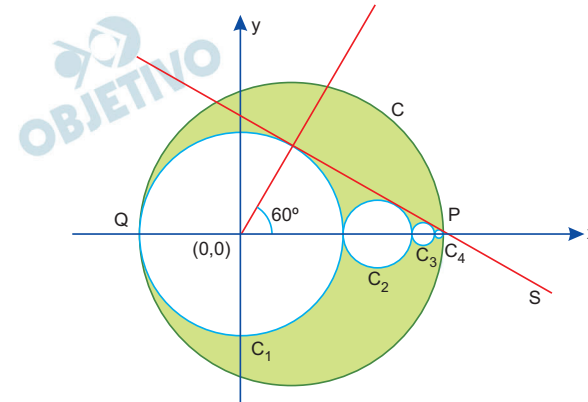
Respostas: a) 256 funções possíveis

b) 76

c)  $\frac{455}{720} = \frac{91}{144}$

# M.04

Considere as circunferências  $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  e a reta  $s$  satisfazendo as seguintes propriedades:

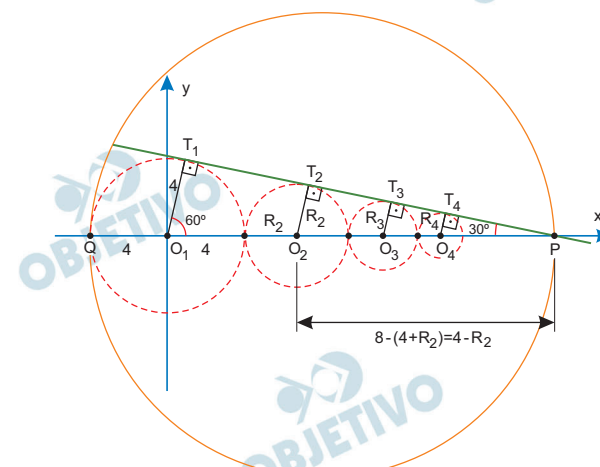


- A circunferência  $C_1$  tem centro  $(0,0)$  e raio  $r = 4$ . Os centros das demais circunferências pertencem ao eixo  $Ox$ .
- A circunferência  $C_2$  é tangente a  $C_1$  e a  $C_3$ , a circunferência  $C_3$  é tangente a  $C_2$  e a  $C_4$ , e assim por diante.
- A reta  $s$  é tangente a cada circunferência  $C_n$  para  $n \geq 1$ .
- O segmento que liga o centro de  $C_1$  ao ponto em que  $s$  tangencia  $C_1$  forma um ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $Ox$ .
- A circunferência  $C$  é tangente a  $C_1$  no ponto  $P = (-4,0)$  e passa pelo ponto  $P = (x_0, 0)$ .

Com base nessas informações,

- determine o raio da circunferência  $C$ .
- dado  $n \geq 1$ , determine a razão entre os raios das circunferências consecutivas  $C_{n+1}$  e  $C_n$ .
- determine a área da região sombreada na figura.

## Resolução



- 1) No triângulo  $O_1T_1P$ , temos

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{4}{O_1P} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{O_1P} \Leftrightarrow O_1P = 8$$

2) O diâmetro da circunferência C é

$$PQ = 4 + 8 = 12 \text{ e assim o raio é } \frac{12}{2} = 6$$

b) 1) A partir da semelhança entre os triângulos

$O_1T_1P$  e  $O_2T_2P$ , temos:

$$\frac{4}{R_2} = \frac{8}{4 - R_2} \Leftrightarrow 8R_2 = 16 - 4R_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12R_2 = 16 \Leftrightarrow R_2 = \frac{4}{3}$$

2) A partir de todas as semelhanças, podemos dizer que

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

c) 1) As medidas dos raios das circunferências  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , ...,  $C_n$ , ... são termos da progressão

geométrica infinita de razão  $\frac{1}{3}$

$$\left(4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots\right) = (R_1, R_2, R_3, \dots)$$

2) A soma das áreas dos infinitos círculos de raio

$$R_1, R_2, R_3, \dots \text{ é } \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots =$$

$$= \pi \left(16 + \frac{16}{9} + \frac{16}{81} + \dots\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{16}{1 - \frac{1}{9}}\right) = 18\pi$$

3) A soma da região sombreada é

$$\pi \cdot 6^2 - 18\pi = 18\pi$$

Respostas: a) 6

b)  $\frac{1}{3}$

c)  $18\pi$

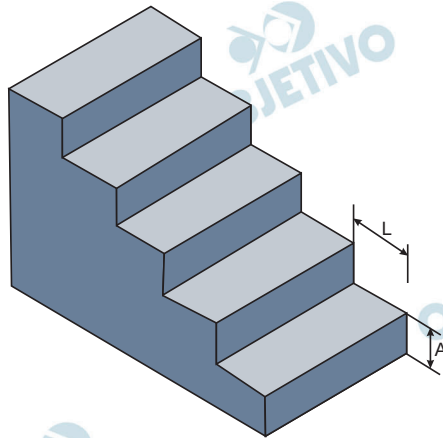


## M.05

Segundo as normas da NBR 9077, uma escada deve ter todos os degraus com a mesma altura e a mesma largura. Além disso, indicando por  $L$  a largura de um degrau e por  $A$  a sua altura, ambas em centímetros, as seguintes desigualdades devem ser satisfeitas:

$$63 \leq 2A + L \leq 64$$

$$16 \leq A \leq 18$$



- Se  $A = 16$ , quais são os possíveis valores de  $L$ ?
- A altura do primeiro andar de um sobrado é 2,52 metros, medido de um pavimento ao outro. O arquiteto projetou a escada para ter o maior comprimento (soma das larguras dos degraus) possível, respeitando as normas citadas. Dessa forma, quantos degraus terá a escada e qual é a altura e largura de cada um?
- Quais são o maior e o menor valor possível para a tangente do ângulo de inclinação de uma escada construída de acordo com essa norma?

### Note e Adote:

A figura é meramente ilustrativa e não representa a escada do enunciado.

### Resolução

- a) Como  $63 \leq 2A + L \leq 64$ ;  $16 \leq A \leq 18$ , para  $A = 16$ , temos:

$$63 \leq 2A + L \leq 64 \Rightarrow 63 \leq 2 \cdot 16 + L \leq 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow 31 \leq L \leq 32$$

- b) Todos os degraus devem ter mesma altura  $A$  com  $16 \leq A \leq 18$  e a altura do primeiro andar é 2,52 metros = 252 centímetros.  
O comprimento da escada é máximo quando  $A$  é mínimo.

Sendo  $n$  o número de degraus, temos:

$$n = \frac{252}{16} = 15,75 \text{ que não convém, pois } n \in \mathbb{N}$$

Fazendo  $n = 15$ , temos:

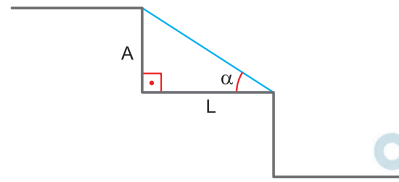
$$15 = \frac{252}{A} \Rightarrow A = 16,8 \text{ que convém, pois } 16 \leq A \leq 18$$

Para  $A = 16,8$ , temos:

$$63 \leq 2A + L \leq 64 \Rightarrow 63 \leq 2 \cdot 16,8 + L \leq 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow 29,4 \leq L \leq 30,4$$

Como a escada deve ter o maior comprimento possível, temos:  $L = 30,4$ .

c)



Sendo  $\alpha$  ângulo de inclinação, o menor valor

possível para  $\text{tg } \alpha = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$  e o maior valor

possível para  $\text{tg } \alpha = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ .

Respostas: a)  $31 \leq L \leq 32$

b)  $A = 16,8\text{cm}$ ,  $L = 30,4\text{cm}$  e o número de degraus é 15.

c) O menor valor é  $\frac{1}{2}$  e o maior é  $\frac{2}{3}$ .

## M.06

Um número complexo é da forma  $z = x + yi$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ .

a) Determine o valor de  $b \in \mathbb{R}$  para que a parte real do

número complexo  $\frac{2 + bi}{1 + i}$  seja igual a zero.

b) Determine a solução da equação  $|z| - z = 1 + 2i$ .

c) Determine o valor de  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , para que a equação

$az\bar{z} + (1 + i)z + \overline{(1 + i)} \cdot z + 1 = 0$  descreva uma circunferência no plano cartesiano.

### Resolução

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 + bi}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} &= \frac{2 - 2i + bi - bi^2}{1^2 - i^2} = \\ &= \frac{2 + b}{2} + \frac{b - 2}{2} \cdot i \end{aligned}$$

Para que a parte real seja igual a zero

$$\frac{2 + b}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

b)  $|z| - z = 1 + 2i$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (x + yi) = 1 + 2i$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - yi = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (-2)^2} - x = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 = 2x + 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Portanto, a solução da equação é

$$\boxed{z = \frac{3}{2} - 2i}$$

c)  $a \cdot z \cdot \bar{z} + (1 + i) \cdot z + \overline{(1 + i)} \cdot z + 1 = 0$

$$\Rightarrow a \cdot (x + yi)(x - yi) + (1 + i)(x + yi) +$$

$$+ \overline{(1 + i)} \cdot \bar{z} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot (x^2 + y^2) + x + yi + xi + yi^2 +$$

$$+ (1 - i)(x - yi) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + ay^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{a}x + y^2 - \frac{2}{a}y + \frac{1}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a}$$

Para representar uma circunferência no plano cartesiano

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2-a}{a^2} > 0 \Rightarrow 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

Portanto,  $a < 2$  e  $a \neq 0$

Respostas: a)  $b = -2$

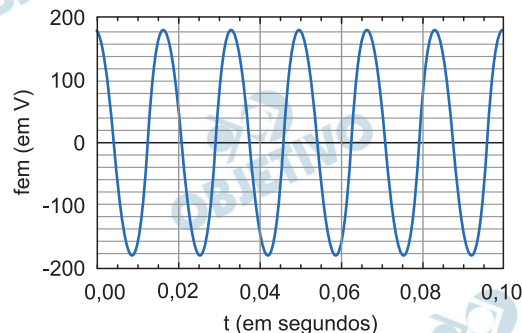
b)  $\frac{3}{2} - 2i$

c)  $a < 2$  e  $a \neq 0$

# F.01

Usinas hidrelétricas convertem energia mecânica em energia elétrica, que depois é transportada por linhas de transmissão até residências, indústrias etc.

- a) A potência aproximada da usina hidrelétrica de Itaipu, a maior do Brasil, é de 15 GW. A potência dissipada por um aparelho de TV em modo de espera (*stand by*) é de cerca de 6 W. Supondo que, em média, cada um dos cerca de 75 milhões de domicílios brasileiros tenha 1 aparelho de TV em modo de espera, que percentagem da potência de Itaipu é consumida apenas para manter TVs brasileiras nesse modo?
- b) Uma versão simples de usina hidrelétrica utiliza a queda livre da água para girar uma turbina. Supondo que a água inicie, praticamente do repouso, uma queda de 20 m até a turbina, com que velocidade a água atinge a turbina?
- c) O impulso da água faz girar a turbina, que por sua vez aciona um gerador. A presença de um campo magnético no gerador em movimento leva ao surgimento de uma força eletromotriz que varia no tempo. Após o transporte da eletricidade até uma residência, o gráfico da força eletromotriz tem o aspecto mostrado na figura abaixo.



Se conectarmos à tomada da residência um ferro de passar com um resistor ôhmico de  $40\Omega$ , qual será a máxima corrente elétrica que percorrerá o resistor do ferro durante sua operação?

### Note e adote:

Despreze a resistência do ar e adote o valor de  $10\text{m/s}^2$  para a aceleração da gravidade.

### Resolução

- a) 1) Cálculo da potência total  $P_{TV}$  de todas as TVs em “stand by”:

$$P_{TV} = 75 \cdot 10^6 \cdot 6 \text{ (W)}$$

$$P_{TV} = 0,45 \cdot 10^9 \text{ (W)} = 0,45\text{GW}$$

- 2) Cálculo da porcentagem  $p$ :

$$p = 100 \cdot \frac{0,45\text{GW}}{15\text{GW}} \text{ (\%)}$$

$$p = 3,0\%$$

- b) Aplicando-se a conservação da energia mecânica para uma massa  $m$  de água, temos:

$$E_f = E_i$$

Tomando-se como referência a base da cachoeira, temos:

$$\frac{m V_f^2}{2} = mgh$$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$$V_f = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \text{ (m)}$$

$$V_f = 20\text{m/s}$$

- c) Aplicando-se a Primeira Lei de Ohm na resistência do ferro, na f.e.m. máxima do gerador, temos:

$$i = \frac{U}{R}$$

$$i = \frac{180}{40} \text{ (A)}$$

$$i = 4,5\text{A}$$

Respostas: a)  $P = 3,0\%$

b)  $V_f = 20\text{m/s}$

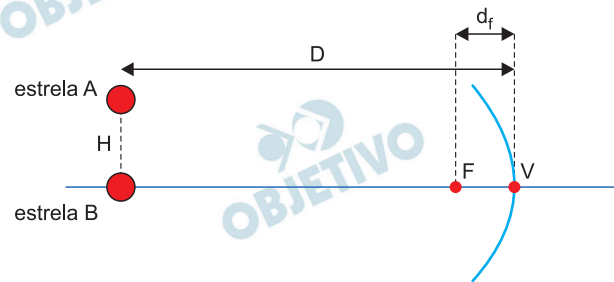
c)  $i = 4,5\text{A}$

## F.02

O telescópio espacial James Webb lançado em 2021 é, em muitos sentidos, um aprimoramento do antigo telescópio Hubble. Uma das diferenças mais notáveis está nas dimensões e nas propriedades ópticas dos espelhos principais destes dois telescópios. Por exemplo: enquanto o espelho principal do Hubble tem uma distância focal de aproximadamente 58 m, a distância focal do espelho principal do James Webb é de aproximadamente o dobro (131 metros). Tratando de maneira aproximada o funcionamento destes telescópios, consideraremos aqui a reflexão por somente um espelho esférico.

Suponha um sistema binário de estrelas separadas por uma distância  $H$ , e localizado a uma distância  $D$  do espelho do telescópio que as observa, conforme mostra a figura. A distância entre o foco do espelho (ponto  $F$ ) e o vértice do espelho (ponto  $V$ ) é a chamada distância focal do espelho ( $d_f$ ).

- a) Dois raios luminosos (“raio 1” e “raio 2”) partindo da estrela  $A$  atingem o espelho. O “raio 1” é paralelo ao eixo do espelho, enquanto o “raio 2” passa pelo ponto  $F$ . Na figura da folha de respostas, trace os raios refletidos pelo espelho.



- b) Considere que o sistema está sendo observado pelo telescópio Hubble, para o qual  $d_f = d$ . Calcule a razão

$$a = \frac{H_I}{H} \text{ onde } H_I \text{ é a distância entre as imagens das es-}$$

trelas formadas pelo espelho. Essa razão é também chamada de “aumento” do espelho, embora esta razão possa ser menor do que 1. Expresse sua resposta em termos de  $D$  e  $d$ .

- c) Considere agora que o sistema esteja sendo observado pelo telescópio James Webb, para o qual  $d_f = 2d$ . Calcule a razão entre os aumentos dos dois espelhos. Expresse sua resposta em termos de  $D$  e  $d$ .

### Note e adote:

As estrelas podem ser consideradas fontes luminosas pontuais.

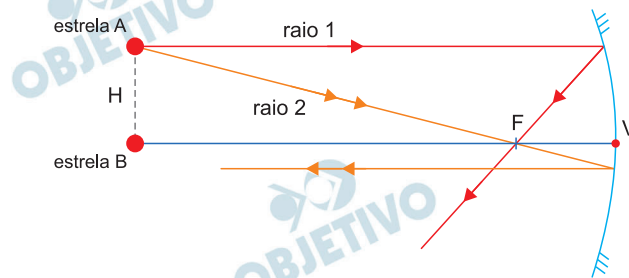
Para espelhos esféricos, o inverso da distância focal é igual à soma do inverso da distância do objeto com o inverso da distância em que a imagem se forma (todas em relação ao centro do espelho).

### Resolução

- a) Considerando-se que o espelho côncavo obedeça às condições de estigmatismo de Gauss, tem-se:

**Raio 1:** Raio incidente paralelo ao eixo principal reflete-se passando pelo foco principal.

**Raio 2:** Raio incidente passando pelo foco principal reflete-se paralelamente ao eixo principal.



- b) Assumindo-se que  $H_1$  e  $H$  são comprimentos sem sinal algébrico, é correto que:

$$A = \frac{H_1}{H} = \frac{D'}{D}$$

Pela Equação de Gauss, determina-se o valor de  $D'$  (distância da imagem do sistema binário de estrelas até o espelho):

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{D} + \frac{1}{D'} \Rightarrow \frac{1}{D'} = \frac{1}{d} - \frac{1}{D}$$

$$\frac{1}{D'} = \frac{D-d}{dD} \Rightarrow D' = \frac{dD}{D-d}$$

Logo:

$$A = \frac{\frac{dD}{D-d}}{D} \Rightarrow A = \frac{d}{D-d}$$

- c) Para o telescópio Webb:

$$\frac{1}{2d} = \frac{1}{D} + \frac{1}{D'_w} \Rightarrow \frac{1}{D'_w} = \frac{1}{2d} - \frac{1}{D}$$

$$\frac{1}{D'_w} = \frac{D-2d}{2dD} \Rightarrow D'_w = \frac{2dD}{D-2d}$$

$$A_w = \frac{D'_w}{D} \Rightarrow A_w = \frac{2dD}{D(D-2d)}$$

$$A_w = \frac{2d}{D-2d}$$



Logo:

$$r = \frac{A_W}{A_H} = \frac{A_W}{A}$$

$$r = \frac{\frac{2d}{D-2d}}{\frac{d}{D-d}}$$

Da qual:

$$r = \frac{2(D-d)}{D-2d}$$

Respostas: a) Ver esquema

$$b) A = \frac{d}{D-d}$$

$$c) r = \frac{2(D-d)}{D-2d}$$

Nota: Como  $D \gg d$ , seria lícito responder:

$$b) A = \frac{d}{D}$$

$$c) r = 2$$

## F.03

Considere um mergulhador em um lago de águas calmas.

- a) Esse mergulhador possui massa de 75 kg e volume corporal de 70 L. Para um mergulho, ele acopla a si um cilindro de ar de 15 kg e volume de 10 L. Estando completamente imersos na água (mergulhador e cilindro), o mergulhador para de nadar. Ele afundará ou subirá até a superfície? Justifique sua resposta.
- b) Durante um mergulho, o mergulhador consulta seu manômetro de pulso e verifica que a pressão absoluta local é de 2,0 atm. A que profundidade o mergulhador está?
- c) Finalmente, considere que o mergulhador está no fundo do lago, onde a temperatura da água é de 7°C e a pressão é de 2,8 atm. Ele produz uma bolha de ar volume  $V_1$ , que sobe em direção à superfície. Quando a bolha houver subido até a iminência de atingir a superfície, onde a temperatura da água é 27°C, seu volume será  $V_0$ . Determine a razão  $V_0/V_1$ .

Note e adote:

A densidade da água é de 1,0 kg/L.

Adote como aceleração da gravidade o valor 10 m/s<sup>2</sup> e como densidade da água o valor  $1,0 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> e utilize  $1,0 \text{ atm} = 1,0 \times 10^5$  Pa.

Trate o ar na bolha como um gás ideal e suponha que não escape ar da bolha durante a subida.

### Resolução

- a) **Cálculo da densidade do mergulhador com seu equipamento:**

$$m = 75\text{kg} + 15\text{kg}$$

$$m = 90\text{kg}$$

$$V = 70\ell + 10\ell$$

$$V = 80\ell$$

$$d = \frac{m}{V}$$

$$d = \frac{90\text{kg}}{80\ell}$$

$$d = 1,125 \cdot \text{kg}/\ell$$

A densidade do mergulhador com o equipamento (1,125kg/ℓ) é maior que a da água (1,0kg/ℓ), logo o mergulhador afunda.

- b) A pressão total no mergulhador é a soma da pressão atmosférica na superfície da água com a pressão hidrostática exercida pela coluna líquida na profundidade H.

$$P_{\text{total}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{hidrostática}}$$

$$P_{\text{total}} = P_{\text{atm}} + d_{\text{água}} \cdot g \cdot H$$

$$d_{\text{água}} \cdot g \cdot h = P_{\text{total}} - P_{\text{atm}}$$

$$h = \frac{P_{\text{total}} - P_{\text{atm}}}{d_{\text{água}} \cdot g}$$

$$H = \frac{2,0 \cdot 10^5 - 1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10} \text{ (m)}$$

$$H = \frac{1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^4} \text{ (m)}$$

$$H = 10\text{m}$$

- c) No fundo do lago  $P_1 = 2,8 \text{ atm}$ , a bolha possui volume  $V_1$  e temperatura  $T_1 = 7^\circ\text{C}$  (280K) e, na superfície  $P_0 = 1,0\text{atm}$ ,  $V_0$  e  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  (300K).

Pela lei dos gases perfeitos, vem:

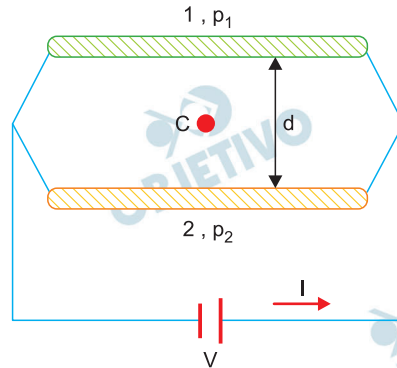
$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T_1}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{2,8}{1,0} \cdot \frac{300}{280} \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} = 3$$

- Respostas: a) afunda  
b) 10m  
c) 3

## F.04

Um circuito é formado por dois resistores em paralelo imersos no vácuo, separados por uma distância  $d$  ligados a uma bateria de força eletromotriz  $V$ . Cada resistor é formado por um fio muito longo, de mesmo comprimento e área de seção transversal, mas com resistividades elétricas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  diferentes entre si, conforme ilustrado na figura.



- Seja  $P_1$  e  $P_2$  as potências dissipadas nos resistores 1 e 2, respectivamente, calcule a razão  $P_1/P_2$ . Expresse sua resposta em termos de  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .
- Considerando que a corrente total no circuito seja  $I$ , obtenha, em função de  $I$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , o valor das correntes  $I_1$  e  $I_2$  que atravessam os resistores 1 e 2, respectivamente.
- Obtenha a expressão para o módulo do campo magnético no ponto  $C$ , mostrado na figura, equidistante dos dois resistores, considerando  $I_1 = I_2/4$ . Expresse sua resposta somente em termos de  $d$ ,  $\mu_0$  (constante de permeabilidade magnética do vácuo) e da corrente total  $I$ .

### Note e adote:

A resistência elétrica é diretamente proporcional ao comprimento, à resistividade e inversamente proporcional à área da seção transversal. O módulo do campo magnético produzido por um fio muito longo transportando uma corrente  $I$  a uma distância  $r$  é dado por  $\mu_0 I / 2\pi r$ , onde  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade do vácuo.

### Resolução

- a) A resistência elétrica de cada um dos fios será dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Denominando-se:  $L_1 = L_2 = L$  e  $A_1 = A_2 = A$ , temos:

$$R_1 = \frac{\rho_1 L}{A} \text{ e } R_2 = \frac{\rho_2 L}{A}$$

A potência elétrica dissipada pelos fios 1 e 2, será:

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} = \frac{V^2}{\frac{\rho_1 L}{A}} = \frac{V^2 A}{\rho_1 L}$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R_2} = \frac{V^2}{\frac{\rho_2 L}{A}} = \frac{V^2 A}{\rho_2 L}$$

Assim,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{V^2 A}{\rho_1 L}}{\frac{V^2 A}{\rho_2 L}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

b) Como os dois fios estão associados em paralelo, temos:

$$V_1 = V_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$\frac{\rho_1 L}{A} \cdot I_1 = \frac{\rho_2 L}{A} \cdot I_2$$

Assim:

$$I_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} I_2 \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} I_1$$

Mas,

$$I_1 + I_2 = I$$

$$I_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} I_1 = I$$

$$I_1 \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = I$$

$$I_1 \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_2} \right) = I$$

$$I_1 = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) I$$

Para determinarmos  $I_2$ , vem:

$$I_1 + I_2 = I$$

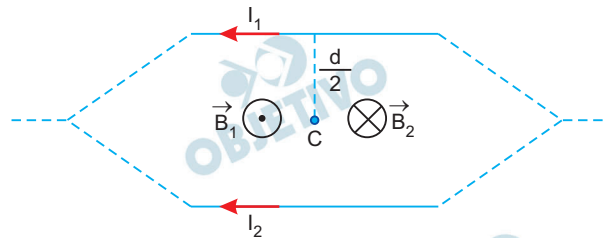
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} I_2 + I_2 = I$$

$$I_2 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} + 1 \right) = I$$

$$I_2 \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} \right) = I$$

$$I_2 = \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) I$$

- c) Utilizando-se a regra da mão direita, podemos determinar os campos magnéticos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  gerados pelos fios 1 e 2.



Mas,

$$I_1 + I_2 = I$$

$$\frac{I_2}{4} + I_2 = I \Rightarrow \frac{5I_2}{4} = I \Rightarrow I_2 = \frac{4}{5} I$$

$$\text{e } I_1 = \frac{1}{5} I$$

Calculamos, agora, os módulos de  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$ :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi d} = \frac{\mu_0 I}{5\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d} = \frac{4\mu_0 I}{5\pi d}$$

Como os vetores  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  têm mesma direção e sentidos opostos, vem:

$$|\vec{B}_c| = B_2 - B_1$$

$$|\vec{B}_c| = \frac{4}{5} \frac{\mu_0 I}{\pi d} - \frac{\mu_0 I}{5\pi d}$$

$$|\vec{B}_c| = \frac{3}{5} \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

Respostas: a)  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

b)  $I_1 = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) I$  e  $I_2 = \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \cdot I$

c)  $|\vec{B}_c| = \frac{3}{5} \frac{\mu_0 I}{\pi d}$

## F.05

O efeito Doppler é caracterizado pela detecção de uma frequência diferente daquela emitida pela fonte, devido ao movimento relativo entre fonte e observador. Ele possui diversas aplicações, seja na medicina, astronomia ou ainda em sonares de velocidade, nos quais a velocidade de um objeto é medida comparando-se a frequência sonora emitida com aquela que é detectada.

Considere um sonar de velocidade que envia ondas sonoras de 0,10 MHz em direção a um veículo que se aproxima com velocidade desconhecida.

- Calcule o comprimento de onda emitido pelo sonar.
- Suponha que exista um detector de ondas sonoras no carro. Calcule a frequência detectada por este detector considerando que o carro se aproxima do sonar com velocidade de 30 m/s.
- Encontre a velocidade do veículo sabendo que o sonar detecta uma frequência de 0,15 MHz refletida de volta, do carro para o sonar.

### Note e adote:

Considere a velocidade do som como 300 m/s.

No efeito Doppler, a frequência  $f_d$  detectada pelo observador e a frequência  $f_e$  emitida pela fonte se relacionam de acordo com a expressão:

$$\frac{f_d}{v_s \pm v_d} = \frac{f_e}{v_s \pm v_e}, \text{ onde } v_s \text{ é a velocidade do som,}$$

$v_d$  é a velocidade do observador e  $v_e$  é a velocidade da fonte de emissão. Os sinais “+” e “-” são escolhidos de acordo com o movimento relativo entre fonte e observador.

### Resolução

- a) Trata-se de uma aplicação direta da *Equação Fundamental da Ondulatória*:

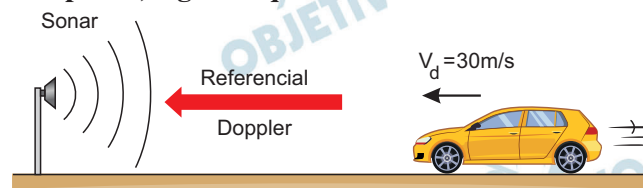
$$V_s = \lambda_{\text{sonar}} f$$

Sendo  $V_s = 300\text{m/s}$  e  $f = 0,10\text{MHz} = 0,10 \cdot 10^6\text{Hz}$ , vem:

$$300 = \lambda_{\text{sonar}} 0,10 \cdot 10^6 \Rightarrow \lambda_{\text{sonar}} = 3000 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{sonar}} = 3,0\text{mm}$$

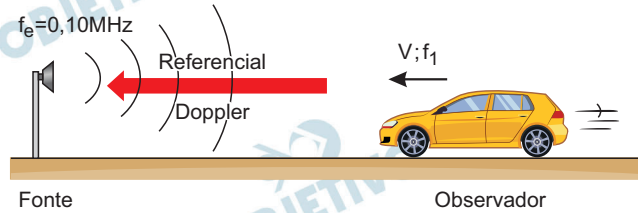
- b) Admitindo-se o sonar (fonte de ondas) em repouso, segue-se que:



$$\frac{f_d}{V_s \pm V_d} = \frac{f_e}{V_s \pm V_e} \Rightarrow \frac{f_d}{300 + 30} = \frac{0,10}{300 + 0}$$

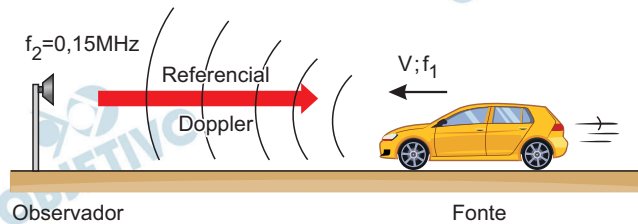
Da qual:  $f_d = 0,11\text{MHz}$

- c) Sendo  $f_1$  a frequência detectada pelo carro, tem-se:



$$\frac{f_1}{300 + V} = \frac{0,10}{300} \Rightarrow f_1 = \frac{300 + V}{3000} \quad (1)$$

- Sendo  $f_2$  a frequência detectada pelo sonar, tem-se:



$$\frac{f_2}{300 + 0} = \frac{f_1}{300 - V} \quad (2)$$

$$(1) \text{ em } (2): \frac{0,15}{300} = \frac{300 + V}{3000(300 - V)}$$

$$1,5(300 - V) = 300 + V$$

$$450 - 1,5V = 300 + V \Rightarrow 150 = 2,5V$$

De onde se obtém:

$$V = 60\text{m/s}$$

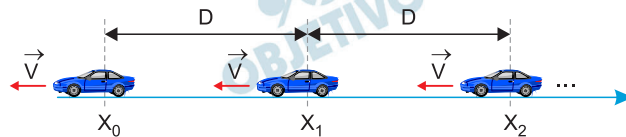
- Respostas: a) 3,0mm  
b) 0,11MHz  
c) 60m/s



## F.06

Em artigo publicado em 2022, uma física e um físico brasileiros propuseram uma interessante analogia entre congestionamentos de carros e a física de buracos negros (Luanna K. de Souza, George E. A. Matsas, “Black-hole analog in vehicular traffic”, American J. of Phys. **90**, 692 (2022)).

Considere uma fila de 9 carros inicialmente em posições  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_8$  separados um do outro por uma distância  $D$  e se movendo com velocidade constante  $v$  na direção negativa de um eixo  $x$ .



No instante inicial, o carro 0 freia, acionando sua luz de freio. Após um tempo de reação  $T_1$ , o carro 1 freia, acionando agora a sua luz de freio. O carro 2, por sua vez, freia e aciona sua luz de freio um tempo  $T_2$  após o carro 1 acionar a sua luz de freio e assim sucessivamente.

Para este problema, considere que no instante da primeira frenagem (instante inicial): (i) o carro 0 esteja localizado na origem ( $x_0 = 0$ ); (ii) a distância entre os carros seja de  $D = 20$  m; e (iii) todos os carros tenham a mesma velocidade escalar  $|\vec{v}| = v_{\text{ini}}$ .

- a) Dada a velocidade  $v_{\text{ini}} = 72$  km/h, calcule o tempo de reação máximo  $T_{\text{máx}}$  para que não ocorram colisões entre quaisquer dois carros.

### Texto para os itens (b) e (c):

Em geral, os tempos de reação dos motoristas não são iguais. Por exemplo, se os primeiros carros estiverem envolvidos em neblina ou fumaça, os tempos de reação serão maiores para os primeiros carros da fila e menores para os últimos carros da fila. Considere a tabela a seguir, que mostra os tempos de reação  $T_1, T_2, \dots, T_8$  (em segundos) retratando uma situação como essa.

Índice $j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_j$ (s)	4,5	2,3	1,6	1,0	0,90	0,75	0,64	0,56

Se o tempo de reação de um dado carro for maior que  $T_{\text{máx}}$ , este carro inevitavelmente irá colidir com o carro da frente. Em uma analogia proposta pelos autores do artigo, este carro entra no “horizonte de eventos” de um “buraco negro veicular”.

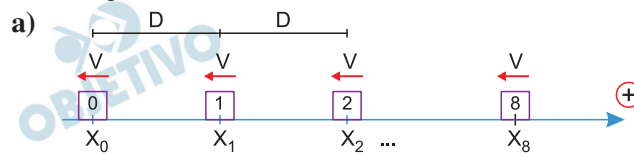
- b) Suponha agora uma outra velocidade  $v_{\text{ini}}$  tal que  $T_{\text{máx}} = 0,89$  s. Utilizando os dados da tabela, determine, em metros, a posição do “horizonte de eventos”, ou seja, a posição  $x_H$  tal que todos os carros com posição inicial  $x_j \leq x_H$  inevitavelmente colidirão com o carro da frente.

- c) Calcule o intervalo de velocidades  $v_{ini}$  compatível com  $x_H = 60$  m.

**Note e adote:**

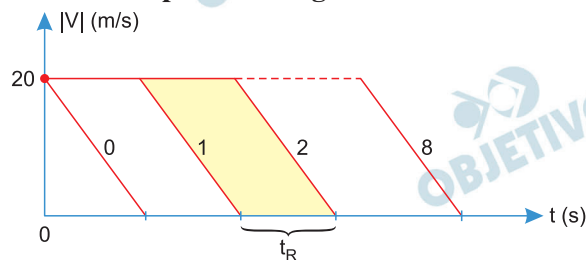
Assuma que a distância entre os carros  $D$  seja muito maior que o comprimento dos carros. Considere que, dada a velocidade  $v_{ini}$ , após o acionamento dos freios, todos os carros que não colidem percorrem uma mesma distância até atingirem o repouso. **Tempo de reação:** O intervalo de tempo que o motorista demora para acionar o freio após ver o sinal emitido pelo carro da frente. **Horizonte de eventos de um buraco negro:** Superfície teórica em torno de seu centro a partir da qual nenhum outro evento pode fazer com que um objeto ou radiação escape de, eventualmente, ser sugado em direção ao centro do buraco negro. No caso do “buraco negro veicular” é o ponto a partir do qual um carro inevitavelmente irá colidir com o carro da frente e não pode escapar de uma colisão em seu futuro do mesmo modo que nada (nem a luz) escapa de um buraco negro real.

**Resolução**



$V = 72\text{km/h} = 20\text{m/s}; D = 20\text{m}$

Podemos observar que o gráfico  $V \times t$  dos carros de 0 a 8 é expresso da seguinte forma:



A diferença entre os deslocamentos de dois carros consecutivos é dada pela área do paralelogramo destacado.

De acordo com o enunciado esta diferença deve ser menor ou igual a  $D = 20\text{m}$ .

$$\Delta s_{12} \leq D$$

$$t_R \cdot 20 \leq 20 \text{ (SI)}$$

$$t_R \leq 1,0\text{s} \Rightarrow t_{R(\text{máx})} = 1,0\text{s}$$

Temos que o tempo de reação máximo deve ser correspondente a 1,0s.

b) De acordo com a tabela para termos  $t > t_{\text{máx}} = 0,89\text{s}$ , vem:

$$t_5 = 0,90\text{s}$$

a posição  $x_5 = 5D$ , logo  $x_5 = 5 \cdot 20$  (m)

$$x_5 = 100\text{m}$$

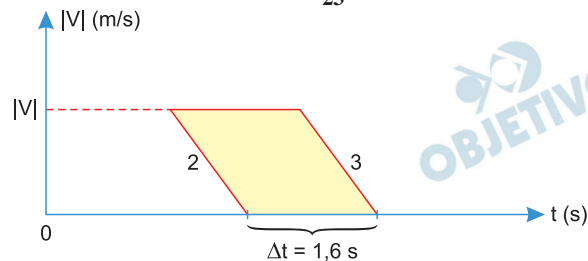
c) Se  $x_H = 60\text{m}$ , temos:

$$J \cdot 20 = 60 \text{ (SI)}$$

$$J = 3$$

Logo o carro  $x_3$  estará no horizonte de eventos, ou seja, os carros de índices J de 1 a 3 irão colidir.

Para isso devemos ter  $\Delta s_{23} > D$ :

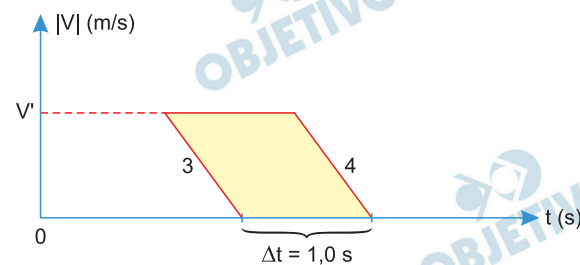


$$\Delta s_{23} = \text{área} (V \times t)$$

$$1,6 \cdot |V| > 20 \text{ (SI)}$$

$$|V| > 12,5\text{m/s}$$

Porém a partir do carro  $x_4$ , não pode ocorrer colisão:



$$\Delta s_{34} \leq D$$

$$1,0V' \leq 20 \text{ (SI)}$$

$$V' \leq 20\text{m/s}$$

Logo:  $12,5\text{m/s} < |V| \leq 20\text{m/s}$

Respostas: a)  $t_{\text{máx}} = 1,0\text{s}$

b)  $x_5 = 100\text{m}$

c)  $12,5\text{m/s} < |V| \leq 20\text{m/s}$

Observação: Na resposta do item (b) o valor de 100m corresponde à posição do último carro que certamente vai colidir ( $T_R = 0,90\text{s}$ ).

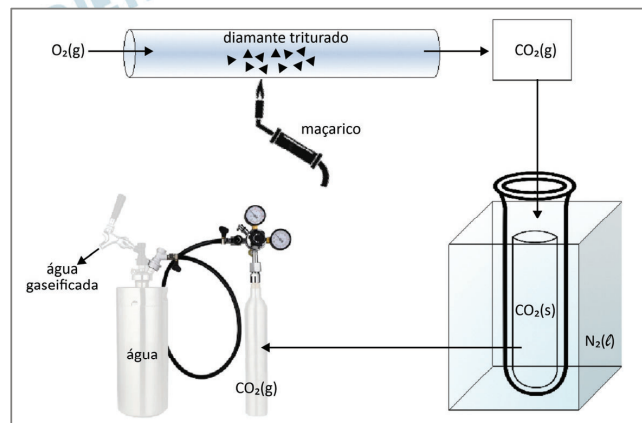
Como  $T_{\text{máx}} = 0,89\text{s}$ , o valor de  $x_H$  é um pouco maior que 100m e menor que 120m, que corresponde ao  $T_R = 0,75\text{s}$ .





## Q.02

O diamante, uma estrutura cristalina de carbono, é o material mais duro encontrado na natureza. Mastigar diamantes provavelmente quebraria os dentes e a sua ingestão causaria desconforto. Entretanto, há uma forma extravagante de ingerir um diamante, que é utilizá-lo para produzir água com gás, como no seguinte procedimento:



- 1 – O diamante triturado foi inserido dentro de um tubo de vidro;
- 2 – Foi injetado oxigênio gasoso no tubo de vidro, que foi aquecido com um maçarico;
- 3 – O gás produzido foi recolhido dentro de um tubo de ensaio imerso em nitrogênio líquido;
- 4 – Todo o sólido formado dentro do tubo de ensaio foi transferido para um cilindro de gás de volume interno de 1 L com a válvula fechada. Todo o  $\text{CO}_2$  sublimou dentro desse cilindro;
- 5 – O cilindro de gás foi então conectado a uma garrafa de água, que foi gaseificada com a abertura da válvula do cilindro.

- a) Com base no esquema, a temperatura de fusão do  $\text{N}_2$  é maior, menor ou igual a temperatura de fusão do  $\text{CO}_2$ ?
- b) Se um experimento exatamente igual for realizado trocando o volume de diamante utilizado pelo mesmo volume de grafite, a quantidade de  $\text{CO}_2$  formado ao fim do processo será menor, igual ou maior? Explique.
- c) Partindo-se de 3 g de diamante, qual a massa de gelo seco obtida? Qual será a pressão gerada pelo  $\text{CO}_2(\text{g})$  dentro do cilindro de gás a  $27^\circ\text{C}$ ? Considere que o rendimento do experimento é de 100%.

**Note e adote:**

**Densidade ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ): Grafite = 2,0; Diamante = 3,5.**

**Massas molares ( $\text{g}/\text{mol}$ ): C = 12; O = 16.**

**Constante universal dos gases ideais:**

**R = 0,082 atm.L.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>**

### Resolução

a) A temperatura de fusão do  $N_2$  é menor que a do  $CO_2$ , pois a solidificação do  $CO_2$  ocorre por ação do  $N_2$  no estado líquido.

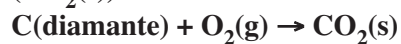
b) Fórmula da densidade

$$\uparrow d = \frac{m \uparrow}{V}$$

Quanto maior a densidade, maior a massa.

A substituição do diamante ( $d = 3,5g/cm^3$ ) pelo grafite ( $d = 2,0g/cm^3$ ), utilizando o mesmo volume, produzirá menor quantidade de  $CO_2$ , pois o grafite possui menor massa de carbono.

c) Cálculo da quantidade em mols de gelo seco ( $CO_2(s)$ ) obtido:



x = 0,25 mol de  $CO_2$  obtido

Como a massa molar do  $CO_2$  vale 44g/mol, temos:

1 mol	44g
0,25 mol	x

$$x = 11g \text{ de } CO_2 \text{ (gelo seco) obtido}$$

Cálculo da pressão no cilindro:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

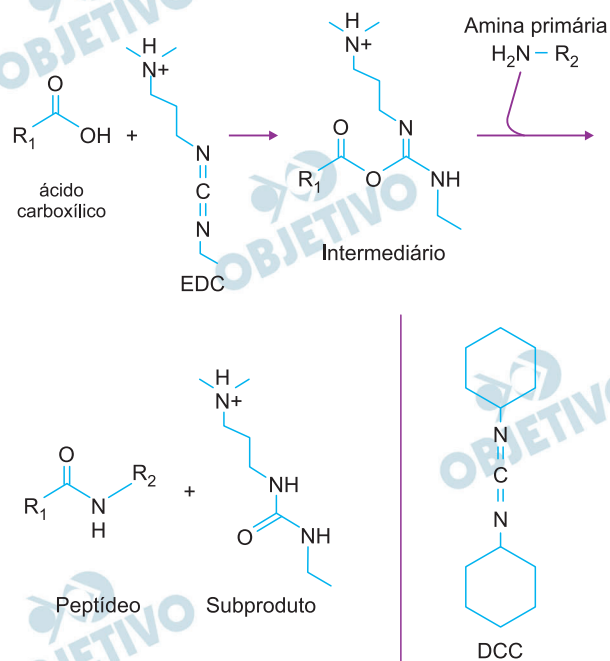
$$P \cdot 1L = 0,25 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ atm} \cdot L \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 300K$$

$$P = 6,15 \text{ atm}$$



## Q.03

Em laboratório, os peptídeos podem ser sintetizados com reagentes que promovem a ligação entre diferentes aminoácidos. O EDC é um composto que pode ser utilizado em solução aquosa com essa finalidade, como representado a seguir:



Um reagente similar chamado de DCC, representado acima, também pode ser utilizado para promover o mesmo tipo de reação, mas não é indicado para o uso em meios polares, como soluções aquosas.

- a) Escreva, no quadro da folha de respostas, a estrutura do subproduto formado quando DCC é utilizado em substituição ao EDC.

Estrutura

- b) O DCC é menos adequado para ser utilizado em solução aquosa do que o EDC por ser menos solúvel. Indique, no quadro da folha de respostas, quais tipos de interações intermoleculares justificam a diferença de solubilidade de cada uma dessas espécies em água.

Um dos métodos utilizados para quantificar proteínas é o método de Kjeldahl, no qual é realizada a determinação da quantidade de matéria nitrogenada total em uma amostra. Esse método consiste em degradar toda a proteína de forma que todos os átomos



de nitrogênio da amostra sejam convertidos em sulfato de amônio.

	Tipo de interação intermolecular com a água
EDC	
DCC	

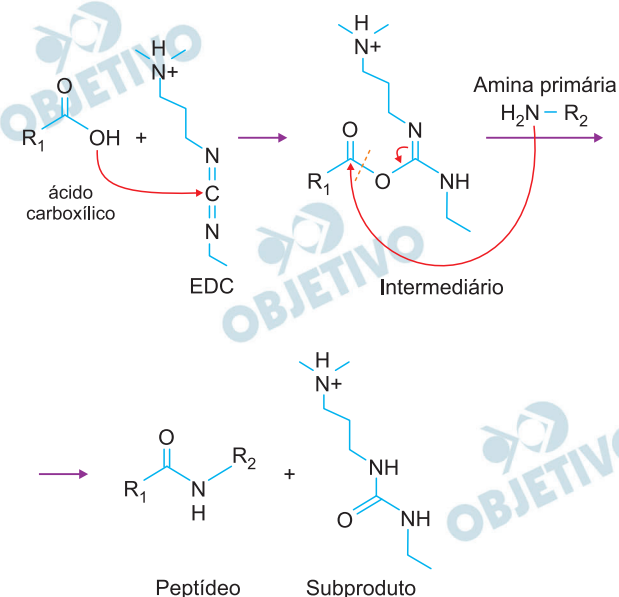
- c) Considere uma amostra de 550,2 mg de um peptídeo de fórmula molecular  $C_{123}H_{193}N_{35}O_{37}$  que foi submetida ao método de Kjeldahl. Calcule a quantidade total máxima de mols de sulfato de amônio  $((NH_4)_2SO_4)$  que seria produzida pela análise dessa amostra utilizando esse método.

**Note e adote:**

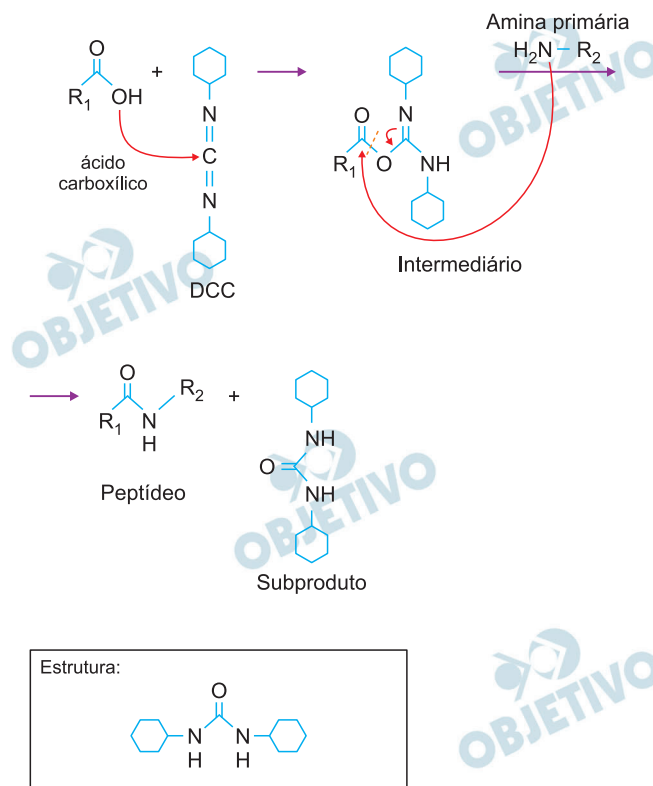
**Massa molar do  $C_{123}H_{193}N_{35}O_{37}$ : 2751 g/mol.**

### Resolução

- a) No modelo fornecido (reação entre ácido carboxílico e EDC), temos:



- Seguindo o modelo apresentado, na reação entre o ácido carboxílico e o DDC, temos:



- b) O EDC, por apresentar um íon de carga positiva, interage com o polo negativo (oxigênio) da água, estabelecendo uma interação do tipo íon-dipolo. Como se trata de uma interação forte, o composto é solúvel em água.

O DDC é um composto apolar, sendo muito pouco solúvel em água. As interações entre esse composto e a água são fracas, do tipo dipolo induzido-dipolo permanente.

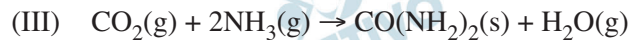
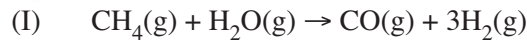
	Tipo de interação intermolecular com a água
EDC	íon-dipolo
DCC	dipolo induzido-dipolo permanente

- c) Sabendo que todo o nitrogênio da proteína é convertido em (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, temos uma relação de 1 mol de C<sub>123</sub>H<sub>193</sub>N<sub>35</sub>O<sub>37</sub> para cada 17,5 mol de (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. Assim:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ C}_{123}\text{H}_{193}\text{N}_{35}\text{O}_{37} &\longrightarrow 17,5 \text{ (NH}_4\text{)}_2\text{SO}_4 \\
 1 \times 2751\text{g} &\longrightarrow 17,5 \text{ mol} \\
 550,2 \cdot 10^{-3}\text{g} &\longrightarrow x \\
 x = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol de (NH}_4\text{)}_2\text{SO}_4
 \end{aligned}$$

## Q.04

Os acontecimentos globais recentes mostraram a importância da oferta de fertilizantes nitrogenados, como amônia e ureia, para a manutenção da segurança alimentar da população mundial. As mudanças na disponibilidade de gás natural impactam diretamente a produção de fertilizantes nitrogenados. As reações a seguir mostram o processo de formação de amônia e ureia a partir do gás natural:



Com base nessas informações e seus conhecimentos, responda:

- Qual o principal componente do gás natural utilizado na produção de fertilizantes nitrogenados?
- Uma outra forma de gerar  $\text{H}_2$  para a reação II é por meio da eletrólise da água utilizando energia solar. Escreva a equação balanceada da reação de eletrólise da água. Dê um argumento que justifique essa fonte de hidrogênio tornar o processo mais sustentável.
- O Brasil consome cerca de 6 milhões de toneladas de ureia por ano. Considerando que toda a produção de ureia tenha o metano como partida, qual a massa, em toneladas, de gás natural necessária para a obtenção de 6 milhões de toneladas de ureia? Considere que o metano corresponde a 50%, em massa, de gás natural.

**Note e adote:**

**Massas molares (g/mol):**

**H = 1; C = 12; N = 14; O = 16.**

### Resolução

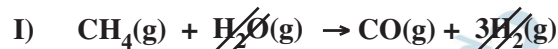
a) O gás natural tem como principal constituinte o hidrocarboneto de menor massa molar, o metano ( $\text{CH}_4$ ).

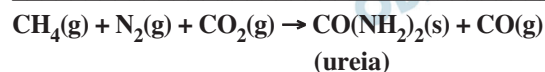
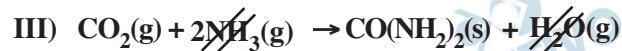
b) Equação global da eletrólise da água:



O processo é sustentável, pois utiliza-se a energia solar como energia limpa (não produz impacto ambiental como, por exemplo, a queima de combustível fóssil) e o gás hidrogênio verde ( $\text{H}_2$ ) é obtido da água, uma fonte renovável.

c) Somando as três reações fornecidas, obtemos a equação global a seguir:





Cálculo das massas molares das substâncias envolvidas na estequiometria:

$$M_{\text{CH}_4} = 12\text{g/mol} + 4 \cdot 1\text{g/mol} = 16\text{g/mol}$$

$$M_{\text{CO}(\text{NH}_2)_2} = 12\text{g/mol} + 16\text{g/mol} + 2 \cdot 14\text{g/mol} + 4 \cdot 1\text{g/mol} = 60\text{g/mol}$$



$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{ g} & & \downarrow \text{ g} \\ 16\text{g} & \longrightarrow & 60\text{g} \\ x & \longrightarrow & 6 \cdot 10^6\text{t} \end{array}$$

$$x = 1,6 \cdot 10^6\text{t de } \text{CH}_4$$

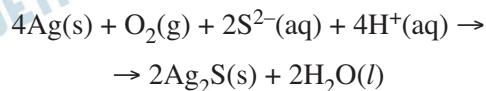
Como o enunciado cita que o metano corresponde a 50% em massa do gás natural, concluímos que a massa de gás natural é de  $3,2 \cdot 10^6\text{t}$ .

$$\text{massa de gás natural} = 3,2 \cdot 10^6\text{t}$$

## Q.05

O escurecimento de joias e artigos de prata ocorre devido à reação da prata, na presença de oxigênio atmosférico, com compostos de enxofre presentes no próprio ambiente, formando o sulfeto de prata, que é um composto de coloração preta.

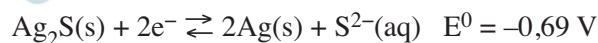
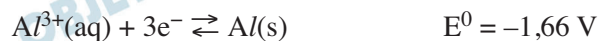
Essa reação é representada a seguir:



Uma das receitas caseiras para o clareamento da prata é descrita a seguir:

1. Adicionar uma solução aquecida de água, sal de cozinha e bicarbonato de sódio em um recipiente forrado internamente com papel alumínio;
2. Adicionar o objeto de prata no recipiente com a solução e deixar reagir por 3 minutos;
3. Retirar o objeto de prata, lavar com água em abundância e secar.

Considerando que os potenciais padrão de redução do  $\text{Al}^{3+}$  e do  $\text{Ag}_2\text{S}$  são:



- a) Escreva, no quadro da folha de respostas, o número de oxidação da prata antes do escurecimento e no composto formado depois do escurecimento.

Antes do escurecimento	Depois do escurecimento

- b) Escreva a equação global balanceada e calcule a diferença de potencial da reação de clareamento da prata (restituição da prata metálica).
- c) Outra receita caseira envolve o uso de pasta de dente, que contém fluoreto, na limpeza de objetos de prata por abrasão e polimento da sua superfície. Considerando que o potencial de redução ( $E^0$ ) do flúor é de +2,87 V, a presença de fluoreto contribui para a limpeza da prata? Justifique com base no potencial da reação global.

### Resolução

a) Número de oxidação da prata (Ag) = 0  
Número de oxidação da prata escurecida  $\Rightarrow$  Ag<sub>2</sub>S

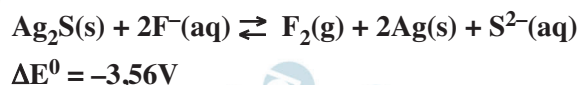
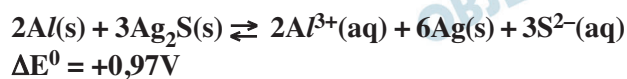
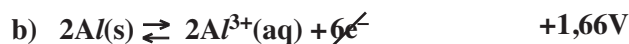
$$\begin{array}{cc} | & | \\ x - 2 & \end{array}$$

A soma dos números de oxidação é zero, logo:

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = +1$$

Completando a tabela, temos:

Antes do escurecimento	Depois do escurecimento
0	+1

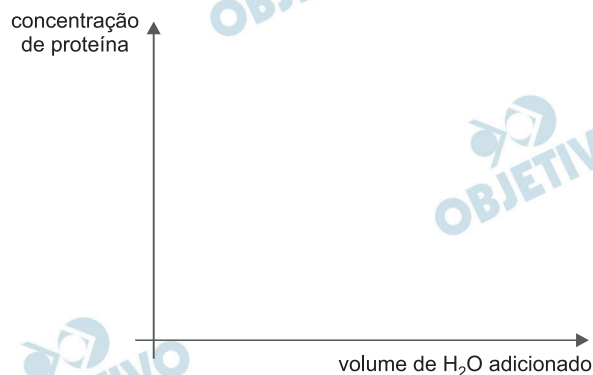


Como o processo não é espontâneo ( $\Delta E^0 < 0$ ), a presença do fluoreto não contribui para a limpeza.

## Q06

Um processo típico de adulteração do leite envolve uma simples diluição com água. Essa adulteração pode ser avaliada pela quantidade de proteína na amostra. Segundo pesquisadores do CENA-USP (Centro de Energia Nuclear na Agricultura da Universidade São Paulo), as proteínas do leite podem ser precipitadas com sulfato de cobre em meio salino por efeito dos íons  $\text{Cu}^{2+}$ . Pela quantidade de  $\text{Cu}^{2+}$  remanescente em solução, é possível calcular, por diferença, a quantidade de proteína na amostra.

- a) Esboce, na folha de respostas, um gráfico da variação da concentração de proteína em função do volume de água adicionado ao leite.

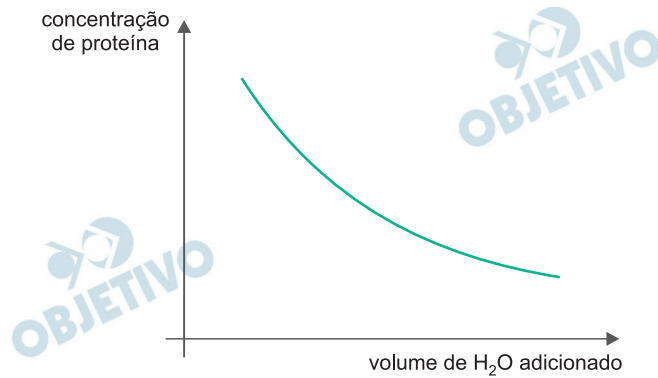


- b) Suponha que uma amostra de 1L de leite não adulterado foi tratada com uma certa quantidade de sulfato de cobre, de modo que toda a proteína presente na amostra fosse precipitada. Se essa mesma quantidade de sulfato de cobre for utilizada em 1L de uma amostra de leite adulterado por diluição, a solução remanescente terá menor, maior ou a mesma concentração de  $\text{Cu}^{2+}$  livre em solução? Justifique.
- c) Uma forma de quantificar os íons  $\text{Cu}^{2+}$  na solução remanescente é por meio de titulação utilizando um agente complexante como o EDTA, que se liga ao  $\text{Cu}^{2+}$  formando um complexo estável de coloração azul. Sabendo que o ponto final da titulação de 10 mL da solução remanescente ocorre quando 25 mL de EDTA 0,01 mol/L são utilizados para complexar o  $\text{Cu}^{2+}$ , calcule a concentração de  $\text{Cu}^{2+}$ , em mol/L, nessa solução, considerando que a estequiometria do  $\text{Cu}^{2+}$  com EDTA é de 1:1, ou seja, na viragem, o número de mols de EDTA e de  $\text{Cu}^{2+}$  são iguais.

### Resolução

- a) **Ao se adulterar o leite pela diluição com água, a concentração de proteína no leite adulterado diminui em relação ao leite não adulterado.**

$$C = \frac{\text{quantidade de proteína}}{\text{volume do sistema}}$$



b) Ao se tratar o leite com  $\text{Cu}^{2+}$ , ocorre a precipitação da proteína do leite.

Como o leite adulterado apresenta menor concentração de proteína, para uma mesma quantidade de íon  $\text{Cu}^{2+}$ , haverá maior concentração de  $\text{Cu}^{2+}$  remanescente no leite adulterado com água do que com o leite não adulterado.

c) Titulação do  $\text{Cu}^{2+}$  remanescente com EDTA:



Cálculo da quantidade de matéria de EDTA:

$$0,01 \text{ mol de EDTA} \text{ ————— } 1000 \text{ mL}$$

$$x \text{ ————— } 25 \text{ mL}$$

$$x = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol de EDTA}$$

Como a proporção é de 1 mol de  $\text{Cu}^{2+}$  para 1 mol de EDTA, teremos nos 10 mL da solução remanescente  $2,5 \cdot 10^{-4}$  mol de  $\text{Cu}^{2+}$ .

Cálculo de concentração em mol/L de  $\text{Cu}^{2+}$ :

$$10 \text{ mL} \text{ ————— } 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol de Cu}^{2+}$$

$$1000 \text{ mL} \text{ ————— } y$$

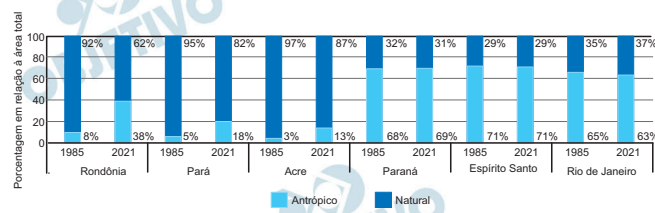
$$y = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

Portanto  $[\text{Cu}^{2+}] = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$



## B.01

O gráfico mostra a cobertura do solo em 1985 e 2021 em seis estados brasileiros. Em cada barra, o azul escuro representa vegetação nativa e o azul claro, ambientes antrópicos.



Dados obtidos em: Projeto MapBiomias - Mapeamento Anual de Cobertura e Uso da Terra no Brasil - Coleção 7.

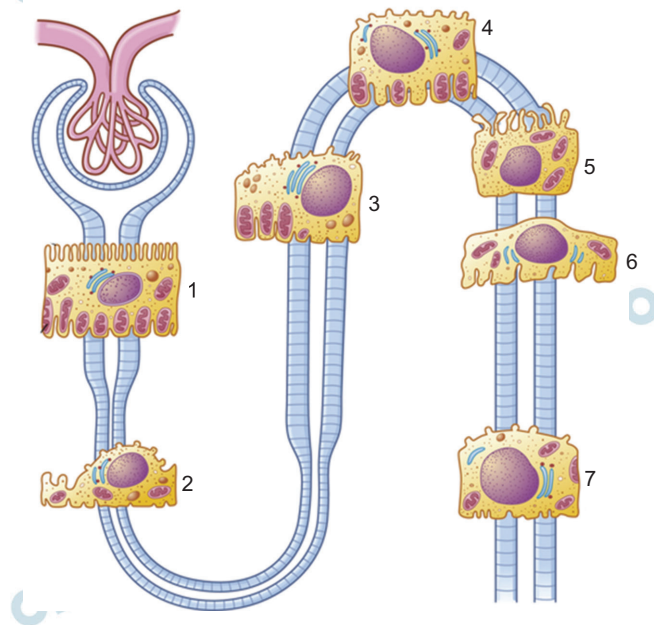
- Qual bioma brasileiro predomina nos estados do Paraná, Espírito Santo e Rio de Janeiro?
- Cite uma característica abiótica típica do bioma brasileiro no qual estão inseridos os estados de Rondônia, Pará e Acre? Cite uma consequência, para a biodiversidade, da perda da vegetação natural que vem ocorrendo nesse mesmo bioma.
- Considerando os seis estados, cite os dois onde houve maior diminuição na proporção de vegetação nativa entre 1985 e 2021. Qual causa histórico-temporal explica a predominância de ambientes antrópicos já em 1985 nos estados do Paraná, Espírito Santo e Rio de Janeiro?

### Resolução

- O bioma brasileiro que predomina nos estados citados é a Mata Atlântica.
- Nos estados de Rondônia, Pará e Acre, observamos o bioma da Floresta Amazônica, onde podemos citar como fator abiótico o solo pobre em nutrientes ou o alto índice pluviométrico. Uma consequência da perda de vegetação nesse bioma é o empobrecimento do solo devido à diminuição de reciclagem de matéria orgânica oriunda da vegetação nessa região.
- A maior diminuição na proporção de vegetação nativa ocorreu nos estados de Rondônia e Pará. A predominância de ambientes antrópicos já em 1985 nos estados de Paraná, Espírito Santo e Rio de Janeiro justifica-se pelo processo de colonização, que foi mais intenso nas regiões próximas ao litoral, e ao processo migratório interno, principalmente no século XX.

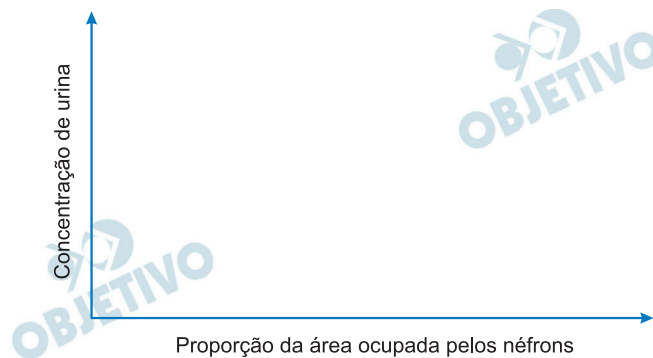
## B.02

Os rins em vertebrados são órgãos do sistema excretor e osmorregulador com estruturas filtrantes, chamadas néfrons, que são capazes de regular a quantidade de água e sais a serem excretados ou reabsorvidos. A função e a anatomia renal podem ser moduladas a depender das diferentes condições ambientais e fisiológicas.



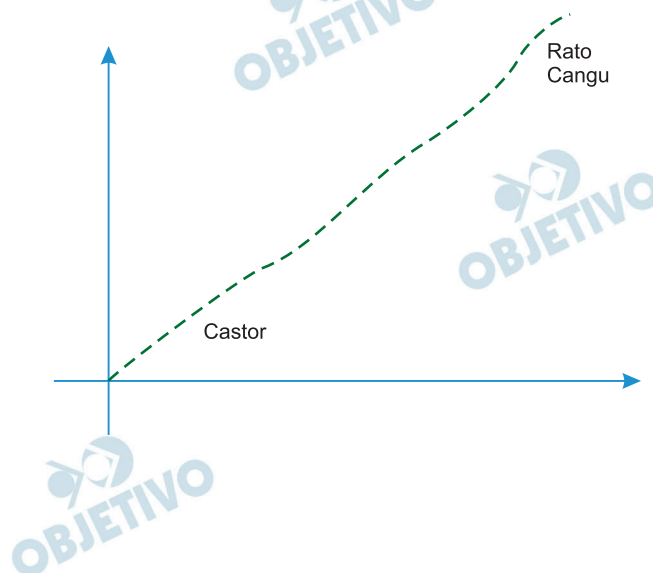
Representação de células epiteliais (1 a 7) em diferentes segmentos de um néfron de rim de vertebrado. Disponível em <https://basicmedicalkey.com/>. Adaptado.

- O que acontece com o volume de urina produzido quando há liberação do hormônio antidiurético (ADH)?
- Observando a ilustração das células epiteliais de cada segmento do néfron (1 a 7), indique aquele que mais reabsorve o conteúdo filtrado. Justifique a sua resposta.
- O castor e o rato canguru são dois roedores com habitats distintos. O castor é semiaquático e vive nas proximidades de rios em florestas temperadas, já o rato canguru vive nos desertos da América do Norte. Considerando a relação entre a área ocupada pelos néfrons e a concentração da urina nessas duas espécies, complete o gráfico da folha de respostas com as respectivas posições ocupadas pelo rato canguru e pelo castor.



### Resolução

- a) O ADH estimula a reabsorção de água no néfron. Logo, o aumento da concentração desse hormônio leva à redução do volume de urina produzida no rim.
- b) No segmento do néfron 1, ocorre a maior reabsorção do conteúdo filtrado por apresentar células com elevada quantidade de microvilosidade na membrana plasmática.
- c) O castor produz uma urina mais diluída (menos concentrada) e possui uma menor área ocupada pelos néfrons devido à baixa necessidade de economia hídrica por viver em um local com alta disponibilidade de água. Já o rato canguro, por viver em um local com restrição hídrica, necessita ter uma alta reabsorção néfrica como economia de água. Logo, formará uma urina mais concentrada e terá uma maior área ocupada pelos néfrons.



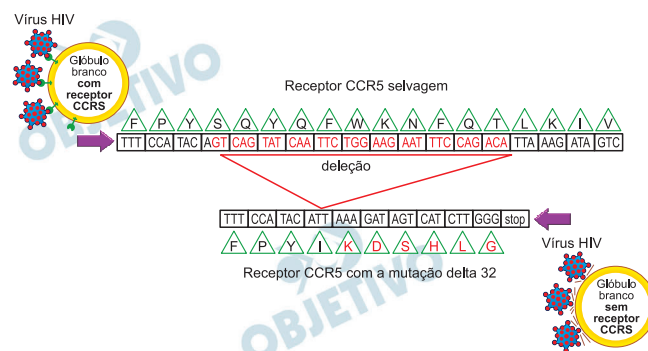
## B.03

“Um homem que vive com HIV desde a década de 1980 foi curado. Este é apenas o quarto caso do tipo no mundo. Ele recebeu um transplante de medula óssea para tratar uma leucemia que desenvolveu aos 63 anos, e o doador era naturalmente resistente ao vírus. A equipe médica responsável pelo seu tratamento decidiu que ele precisava do transplante para substituir sua medula óssea doente por células normais. O HIV entra nos glóbulos brancos do nosso corpo usando uma porta microscópica - uma proteína chamada CCR5. No entanto, algumas pessoas, incluindo o doador, têm mutações no gene CCR5 que fecham essa porta e impedem a entrada do vírus.”

Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/geral-62324526>.

Adaptado.

O HIV liga-se ao receptor CCR5 durante o processo de infecção dos glóbulos brancos. A mutação delta 32 do CCR5 inviabiliza sua inserção na membrana plasmática impedindo a entrada do HIV conforme ilustrado a seguir:



Disponível em <https://doi.org/10.1007/s40011-021-01237-y/>. Adaptado.

- Cite outra infecção sexualmente transmissível, além da AIDS.
- Um laboratório de análises clínicas possui amostras de sangue e mucosa bucal colhidas do paciente antes do transplante e após 1 ano do procedimento. Qual dessas 4 amostras é a indicada para confirmar a presença da mutação no gene CCR5 no paciente curado? Justifique sua resposta.
- Considerando a estrutura dos genes eucarióticos, a deleção de 32 pares de bases aconteceu em que parte do gene CCR5? Justifique sua resposta.

### Resolução

- Podemos citar como exemplos de ISTs: sífilis, gonorreia, tricomoníase e HPV.
- A confirmação da mutação no gene CCR5 ocorre na amostra de sangue após o transplante. Com o transplante, o paciente recebe células-tronco adultas que passarão a produzir linfócitos cujo DNA contém a mutação delta32 e que estarão presentes na circulação.

- c) A mutação aconteceu na região codificante do gene, mais precisamente na região do éxon. Regiões de éxons contêm as informações para a codificação dos aminoácidos da proteína, sendo que a deleção de bases altera a sequência original e cria um códon de parada prematuro.

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

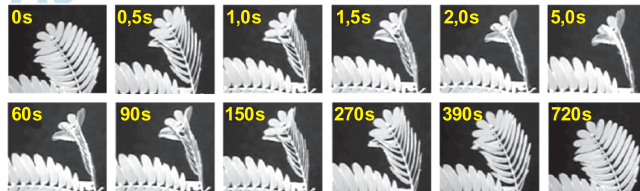
 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

## B.04

Em um experimento, pesquisadores filmaram os folíolos da leguminosa *Mimosa pudica* (popularmente conhecida como “dormideira” ou “sensitiva”) ao serem estimulados mecanicamente no tempo 0 s e seu comportamento durante os 12 minutos seguintes, conforme a sequência de fotos:

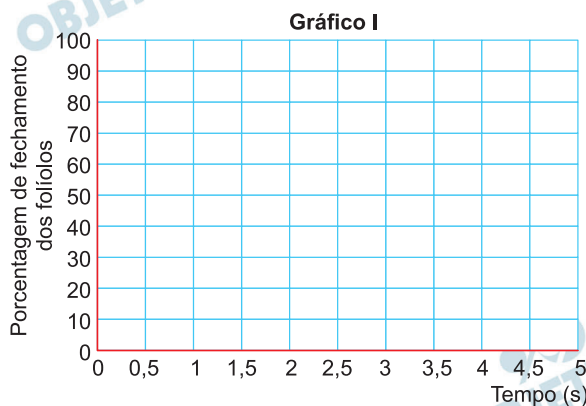


Adaptado de DOI: 10.1111/j.1365-3040.2009.02066.x

- a) O mecanismo do movimento de fechamento dos folíolos nas dormideiras difere de qualquer mecanismo de movimentos que ocorre em animais. Cite um tipo de célula envolvida em movimentos nos animais, mas que não está presente em plantas.

Tipo celular = \_\_\_\_\_

- b) Represente, nos gráficos da folha de respostas, as curvas resultantes dos processos de fechamento (Gráfico I) e de reabertura (Gráfico II) dos folíolos.



- c) O comportamento de fechamento dos folíolos tem um papel no balanço energético da planta, isto é, quanta energia a planta produz e gasta. Cite um processo envolvido nesse balanço energético e justifique sua resposta.

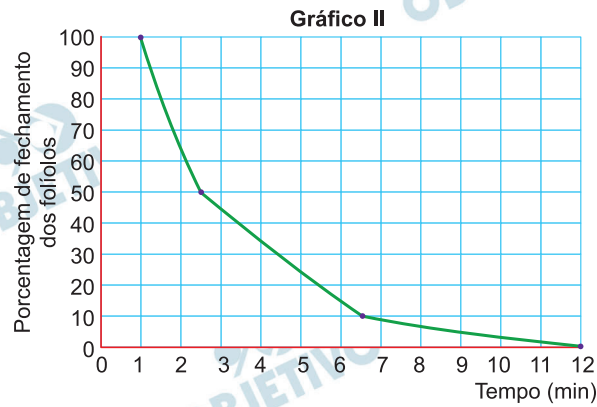
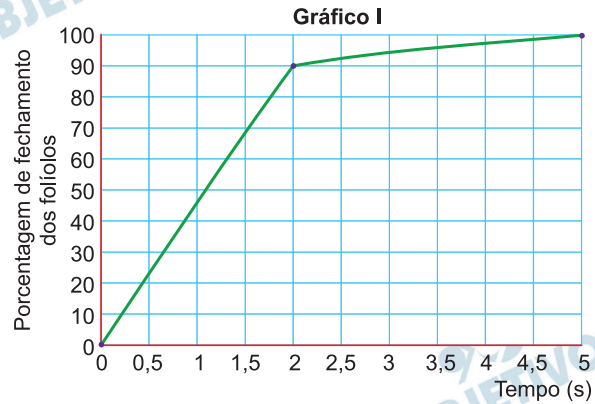
Note e adote:

Para o item b), considere os folíolos totalmente abertos e totalmente fechados como 0% e 100%, respectivamente.

### Resolução

a) Tipo celular = Muscular (Miócito)

b)

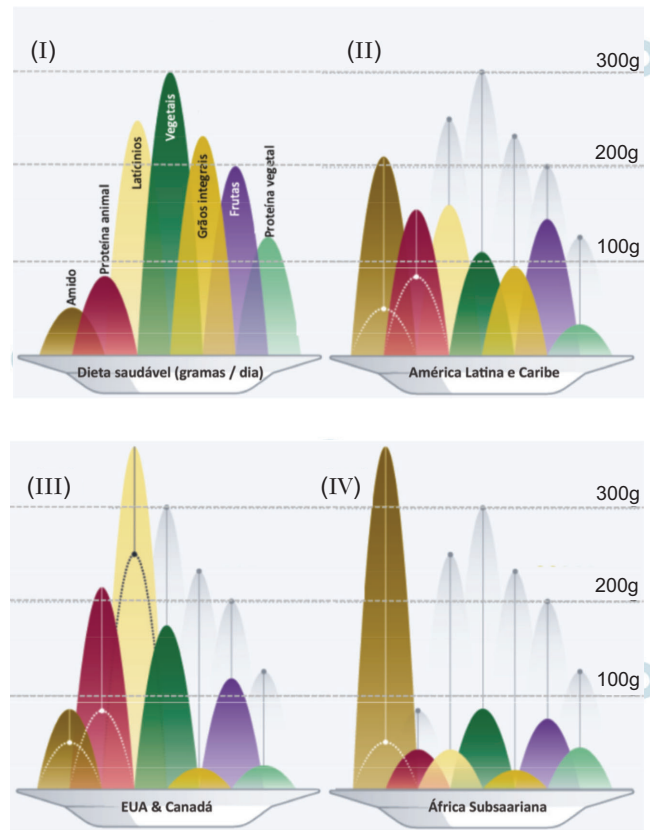


c) O fechamento dos folíolos ocorre com gasto energético, pois é um mecanismo ativo e portanto envolve a respiração celular. Em contrapartida, haverá diminuição na taxa fotossintética, pois a superfície de absorção de luz é reduzida com os folíolos fechados.



## B.05

A figura a seguir mostra uma composição ideal e balanceada de sete grupos alimentares em uma dieta considerada saudável para uma pessoa de 30 anos (I) e os valores médios correspondentes às dietas que ocorrem em países da América Latina (II), Estados Unidos e Canadá (III) e África Subsaariana (IV). Esse mesmo estudo vai além e considera importante que a saúde humana seja conjugada à saúde planetária, para que haja uma produção sustentável de alimentos para uma população mundial crescente. Ou seja, é importante entender que a produção de alimentos tem uma demanda ambiental que deve ser considerada para se conseguir um sistema de produção global sustentável.



- a) Em qual grupo alimentar espera-se encontrar alimentos com maior teor de vitamina C (ácido ascórbico)?
- b) Dentre os 21 picos das regiões II, III e IV, aponte aquele que apresenta a maior diferença proporcional em relação à dieta considerada como saudável (I). Cite uma consequência negativa à saúde que este consumo inadequado pode causar.

Região	Grupo alimentar	Consequência negativa do consumo excessivo



- c) Escolha dois grupos alimentares e cite, para cada um: um exemplo de produto deste grupo alimentar e um impacto ambiental decorrente da produção não sustentável deste produto. Utilize a tabela específica da folha de respostas.

Grupo alimentar	Produto	Impacto

### Resolução

- a) No grupo das frutas

b)

Região	Grupo alimentar	Consequência negativa do consumo excessivo
IV	Amido	Risco de obesidade e diabete mellitus

- c)

Grupo alimentar	Produto	Impacto
Proteína animal	carne bovina	Liberação de gás metano (gás estufa)
Proteína vegetal	soja	Desmatamento de áreas nativas necessárias à ampliação de regiões de cultivo

## B.06

Quem mora ou já visitou Alagoas sabe que o sururu é uma tradição na culinária local e uma fonte de renda para quem vive às margens da lagoa Mundaú. Mas o tradicional molusco alagoano sumiu da lagoa. Desde as chuvas de junho, o sururu não é mais encontrado, deixando pelo menos 3.000 pessoas sem o sustento gerado pela pesca e tratamento do molusco. Ao mesmo tempo, uma espécie de bivalve invasor (classe de moluscos à qual também pertence o sururu), com origem na América Central e distribuída em diversos ambientes estuarinos pelo mundo, ganhou terreno e ameaça tomar o local, numa disputa com a espécie nativa. Segundo um biólogo explicou, “há um grande risco de essa espécie invasora se adaptar bem e começar a disputar e dominar o alimento e o espaço do sururu, cuja população está em queda no número de indivíduos”. O bivalve invasor não tem valor de mercado e, quando pescado, é descartado de volta. O “sururu já vinha sofrendo com uma forte pressão por conta dos poluentes e pesca sem controle, mas as fortes chuvas em junho e julho em Alagoas diminuíram a salinidade da água e uma grande quantidade de matéria orgânica, lixo, esgotos, resíduos e principalmente sedimentos levados pelo rio Mundaú se acumularam lá”, afirma o biólogo. Sem o sururu, a comunidade está apreensiva porque a população da orla sofre com prejuízos e falta de renda, já que, na comunidade, uma parte das pessoas saía nos barcos para pescar e outra tratava o sururu em um processo chamado de despinicar (que é tirar o produto do molusco de dentro da casca).

Adaptado de “Patrimônio de Alagoas, sururu sofre com espécie invasora e some de lagoa”, publicado no UOL em 28/08/2022.

- a) A que parte do indivíduo corresponde o “produto do molusco” que é referido no texto no processo de “despinicar”?
- b) Baseado no texto, cite, no espaço reservado na folha de respostas, um fator biótico e um fator abiótico, com suas respectivas causas, que estão relacionados ao desaparecimento do sururu na lagoa Mundaú.
- c) Cite um risco para a saúde humana associado ao consumo de espécies de bivalves e uma forma de prevenir esse risco ao consumir essa iguaria.

### Resolução

- a) “produto” = massa visceral

b)

	Fator	Causa
Biótico	Competição interespecífica	Introdução de uma espécie (exótica) provocando competição por recursos ambientais
Abiótico	Salinidade	Excesso de chuva reduz a salinidade da água prejudicando o desenvolvimento da espécie

- c) Por serem animais filtradores, os bivalves podem acumular metais pesados e micro-organismos patogênicos prejudiciais ao ser humano. Um modo de prevenir esse risco é a criação desses animais em cativeiro com água potável livre de contaminantes.

# G.01

Da fossa das Marianas, no oceano Pacífico, aos Alpes; das praias de Fernando de Noronha às grandes metrópoles, os microplásticos estão em toda parte, em geral sem serem vistos. Como tema de estudo é algo relativamente novo e ganhou impulso somente neste século, com mais força nos últimos anos.

Disponível em <https://revistapesquisa.fapesp.br/a-ameaca-dos-microplasticos/>. Adaptado.

Baseado no texto e em seus conhecimentos sobre os microplásticos, responda:

- Cite uma fonte de liberação dos microplásticos.
- Indique e explique em quais ambientes ocorre a maior concentração de microplásticos no planeta.
- Indique duas estratégias que podem ser adotadas pela população para reduzir a produção de microplásticos.

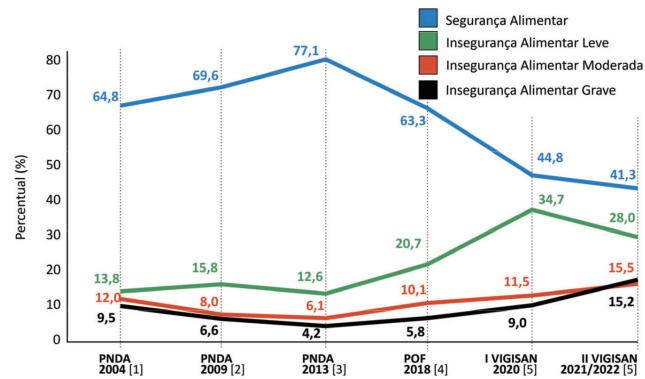
## Resolução

- Como exemplo de fontes de liberação dos microplásticos, podem-se citar a fragmentação de material plástico, lavagem de roupas, tintas látex e acrílicas, redes de pescas utilizadas em grandes extensões, tecidos de poliéster, cosméticos, entre outros polímeros que são oriundos do descarte incorreto de resíduos industriais e residenciais, além da liberação realizada pelo transporte marítimo.**
- A maior concentração de microplásticos ocorre nos rios de drenagem exorreica e nos oceanos. Isso porque muitos cursos de água abrigam grande concentração de atividades urbano-industriais que despejam seus resíduos sem controle e tratamento prévio. Assim, o escoamento das águas faz com que os microplásticos atinjam os oceanos, tornando-os ambientes de alta concentração.**
- Como possíveis estratégias para a redução da produção de microplásticos, podem-se citar redução de consumo de plásticos, reciclagem de materiais, descarte adequado de resíduos sólidos, implantação de redes de coleta de esgoto, produção de produtos com materiais biodegradáveis, entre outros.**

## G.02

Observe o gráfico a seguir:

**TENDÊNCIA DA SEGURANÇA E INSEGURANÇA ALIMENTAR NO BRASIL**  
Escala Brasileira de Insegurança Alimentar (2004 a 2022)



fontes:

[1] Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio 2003-2004 (IBGE);

[2] Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio 2008-2009 (IBGE);

[3] Pesquisa Nacional por Amostra 2013-2014 (IBGE);

[4] Pesquisa de Orçamentos Familiares 2017-2018 (IBGE);

[5] Inquéritos Vigisan, Rede Penssan.

A partir dos seus conhecimentos sobre o tema,

- conceitue Segurança Alimentar.
- explique duas medidas socioeconômicas que poderiam ser adotadas para ampliar a segurança alimentar no Brasil.
- explique a tendência da Segurança Alimentar no Brasil entre 2004 e 2022, indicando uma causa para o aumento da Insegurança Alimentar grave a partir de 2013.

### Resolução

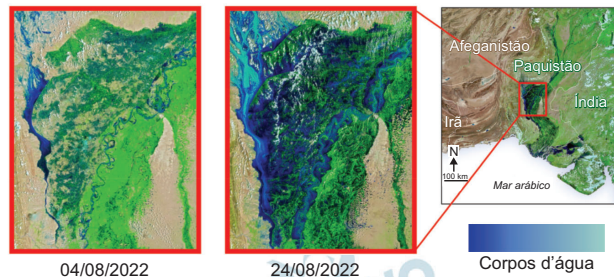
- De acordo com a FAO (Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura), a segurança alimentar ocorre quando todas as pessoas têm acesso físico, social e econômico permanente a alimentos seguros, nutritivos e em quantidade suficiente para satisfazer suas necessidades nutricionais e preferências alimentares, tendo assim uma vida ativa e saudável.
- São medidas socioeconômicas capazes de aumentar a segurança alimentar: estímulo à agricultura familiar e ao pequeno e médio produtor, responsáveis em grande parte pelo cultivo de alimentos voltados à subsistência; o combate ao desperdício de alimentos em toda a cadeia produtiva, o que envolve produção, transporte e distribuição; incentivos à agroecologia e à produção de alimentos saudáveis, de modo a possibilitar uma alimentação adequada;

políticas voltadas ao combate à pobreza e visando à distribuição de renda.

- c) Verifica-se, por meio do gráfico, que houve redução da insegurança alimentar grave até o ano de 2013, quando esta voltou a crescer, o que indica piora na alimentação das famílias brasileiras nos últimos anos e o retrocesso da segurança alimentar no Brasil, resultado do aumento da pobreza e da desigualdade socioeconômica, intensificada em meio à pandemia da covid-19, o que levou a um crescimento ainda mais expressivo da miséria a partir de 2020. Soma-se as essas condições a prioridade dada à produção de *commodities* em detrimento da produção voltada ao mercado interno, o que causa o aumento no preço dos alimentos, tornando-os mais custosos à população de menor renda.

## G.03

Observe as imagens relativas a uma grande inundação que atingiu o Paquistão a aproximadamente 1000 km da cadeia montanhosa do Himalaia, em agosto de 2022.



<https://earthobservatory.nasa.gov/images/150279/devastating-floods-in-pakistan/>

<https://earthobservatory.nasa.gov/>

- Indique o principal regime climático associado à inundação de tal magnitude.
- Cite e explique outra causa que pode estar associada a essa grande inundação no Paquistão.
- A partir das imagens de satélite, indique e explique uma das características da paisagem que permitem apontar que a área destacada é suscetível à inundação.

### Resolução

- Trata-se do regime tropical de monções, de elevados totais de precipitação, concentrados nos meses de verão.
- Outra causa que pode estar associada a essa grande inundação no Paquistão foi a elevação excepcional das temperaturas no verão de 2022, o que intensificou o derretimento das geleiras na Cordilheira do Himalaia e aumentou o volume dos rios da rede hidrográfica do Rio Indo.
- A partir das imagens de satélite, uma das características da paisagem que torna a área mais suscetível à inundação é o relevo plano de baixas altitudes (planície). O aumento do nível das águas da rede hidrográfica do Rio Indo favorece a inundação da planície, conforme ilustrado na imagem central.

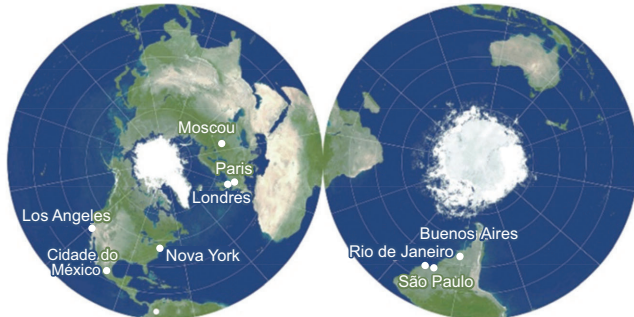


## G.04

Observe a reportagem a seguir:

### UM PLANETA SEM DISTORÇÕES: FÍSICOS PROPÕEM A ADOÇÃO DE UM NOVO MAPA-MÚNDI

O astrofísico Richard Gott, o matemático Robert Vanderbei e o cosmólogo David Goldberg chegaram ao conceito do disco aberto, mostrado abaixo, com o intuito de corrigir os equívocos do modelo usado da mesma forma há mais de quatro séculos, baseado na projeção de Mercator.



Revista *Veja*, 05 de março de 2021. Adaptado.

A notícia faz alusão às distorções produzidas pela projeção de Mercator. A partir dos seus conhecimentos sobre cartografia,

- cite o contexto no qual foi proposta a projeção de Mercator.
- cite e explique uma dessas distorções que podem ser evitadas pela projeção apresentada na reportagem.
- indique e explique outra projeção cartográfica que apresenta distorção diferente daquela encontrada na projeção de Mercator.

#### Resolução

- A *projeção de Mercator* foi desenvolvida no século XVI, no contexto da expansão marítima europeia, período das “*Grandes Navegações*”.
- A *projeção de Mercator*, do tipo conforme, privilegia as formas, em detrimento da proporção entre as áreas representadas e das distâncias. Por se tratar de uma *projeção cilíndrica equatorial*, traz as áreas de menor latitude – próximas ao Equador – representadas com maior fidelidade, enquanto as áreas de maior latitude – mais afastadas do Equador – apresentam as maiores deformações, sendo superdimensionadas, o que valoriza o continente europeu, que nesta projeção tem posição central e superior. A nova projeção proposta, embora represente a superfície terrestre de forma descontínua, elimina as deformações



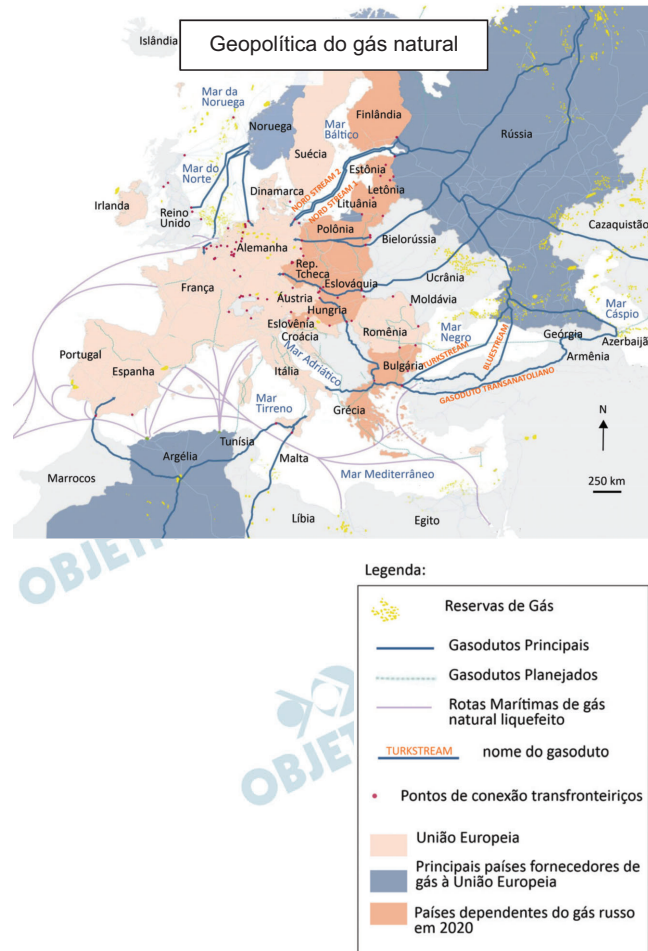
nas áreas de maior latitude, representando as áreas mapeadas mantendo a proporção relativa às áreas representadas.

- c) Diferente da projeção cilíndrica de Mercator – do *tipo conforme* – a projeção de Peters, desenvolvida na década de 1970, é do *tipo equivalente*, privilegia a proporção da dimensão entre as áreas representadas em detrimento de sua forma.

## G.05

Em diversos países da Europa o preço do gás aumentou mais de 50%. Energia fóssil considerada abundante e menos prejudicial ao ambiente do que o petróleo ou o carvão, o gás natural continua a ser um recurso essencial no quadro energético europeu e no centro das questões estratégicas entre os países produtores e os países consumidores.

*Magazine Carto, Agosto de 2022. Adaptado.*



<https://www.areion24.news/2022/08/01/geopolitique-du-gaz-une-europe-trop-dependante/>

A reportagem refere-se ao período de 2021-2022, em que questões geopolíticas envolvendo a Rússia, maior produtora de gás natural da Europa, resultaram na elevação do preço desse recurso energético. Com base no texto, na interpretação do mapa e em seus conhecimentos, responda:

- Qual evento, envolvendo a Rússia, resultou no aumento do preço do gás natural nos anos 2021-2022?
- Cite e explique uma consequência positiva para a Rússia relacionada à construção dos gasodutos *Nord Stream 1* e *Nord Stream 2* na região do Mar Báltico.
- Cite e explique uma consequência negativa para a Rússia relacionada à localização dos gasodutos *Blue Stream* e *Turkstream* na região do Mar Negro.

### **Resolução**

- a) Em 2022, houve uma escalada nas tensões envolvendo a Rússia e a Ucrânia, o que terminou na deflagração do conflito entre os dois países a partir de fevereiro desse ano. Os países europeus, discordando do ataque russo à Ucrânia, impuseram punições à Rússia, o que resultou, entre outras consequências, no embargo no fornecimento de gás natural. O gás, reduzido em sua disponibilidade, teve, como consequência, a majoração de seu preço.
- b) Uma consequência positiva para a Rússia é tornar muito maior a influência estratégica e econômica russa sobre a economia europeia, intensificando a dependência dos diversos países europeus, muitos deles membros da União Europeia.
- c) A consequência negativa deve-se ao fato de o escoamento da produção de gás pelo Mar Negro envolver territórios de países membros da OTAN.

## G.06

Em 4 de março de 1513, o espanhol Juan Ponce de León saiu da ilha de Porto Rico com três navios e cerca de 200 homens para explorar o Norte. No dia 2 de abril, quase um mês mais tarde, ele conquistou um novo território: a Flórida. Ficou lá por cinco dias e depois recomeçou a expedição, agora indo na direção Sul. Mas dessa vez o movimento foi diferente. Havia uma corrente nas águas do mar tão forte que, mesmo com vento a favor, os navios eram empurrados para trás – o San Cristóbal, o menor dos três, chegou a se perder dos outros por dois dias.

Ponce de León e seus marinheiros não sabiam, mas estavam bem no meio da Corrente Marítima do Golfo – que é especialmente forte entre a Flórida e as Bahamas, onde eles estavam. Com o tempo, os navegadores espanhóis aprenderam a usar aquilo a seu favor: a corrente dava um belo empurrão na volta das expedições, permitindo retornar à Europa mais depressa.

Disponível em <https://super.abril.com.br/sociedade/>. Adaptado.

Baseado no texto e em seus conhecimentos, responda:

- Tendo Flórida e Europa como referência, indique para qual sentido a corrente marítima do Golfo levava os navios.
- Indique duas razões por que essa corrente oceânica, em seu local de origem, é quente na superfície.
- Cite e explique um efeito dessa corrente oceânica sobre o clima da Europa Setentrional.

### Resolução

- A partir da costa da Flórida, a Corrente do Golfo segue a trajetória no sentido nordeste, atravessando parte do Atlântico Norte, atingindo o noroeste do continente europeu.**
- As águas que formam a Corrente do Golfo têm origem no Atlântico Equatorial, na costa oeste da África, área de elevada temperatura ao longo do ano, além de ser uma corrente que percorre longas trajetórias em áreas intertropicais de elevada quantidade de radiação solar.**
- A atuação da Corrente do Golfo, em razão de suas temperaturas mais elevadas, ameniza os rigores climáticos na Europa Setentrional. Em razão de suas propriedades, a corrente dificulta o congelamento dos portos costeiros em áreas de baixas temperaturas do ar atmosférico nos meses de inverno.**

## H.01



“Independência ou morte”, óleo sobre tela,  
de Pedro Américo (1888).

<https://www.gov.br/>.



“El Juramento de los treinta y tres orientales”,  
óleo sobre tela, de Blanes (entre 1875 e 1878)

<https://blanes.montevideo.gub.uy/>.

“O quadro *Independência ou Morte* retrata o momento em que D. Pedro levanta a espada e proclama a independência do Brasil. Saliento, nessa obra, a pompa em sua composição que sobressai em todos os detalhes. Além disso, note-se que a luz esplendorosa que ilumina os personagens vem do alto, do céu.

A tela do maçom Blanes representa o juramento de 33 homens que, em 25 de agosto de 1825, deram início à reconquista militar da Província Oriental [que] culminou com a independência nacional uruguaia. Ênfase nesta pintura que os homens pisam num terreno plano e usam roupas comuns. Uma forte luz, que brota da terra, os ilumina, mostrando sua força e determinação interiores.

Assim, Pedro Américo revestiu seu tema com grandeza, ressaltando as aparências exteriores. De outra parte, o uruguaio salienta as virtudes que vinham de dentro dos heróis, fazendo dos trajes apenas acessórios menores que não ofuscam a magnitude da cena histórica. Na minha visão, as escolhas pictóricas de Pedro Américo estão relacionadas ao imaginário simbólico da monarquia e as de Blanes foram inspiradas pelo ideário republicano. São as afinidades políticas que nos fazem entender as concepções diferentes dos dois pintores sobre o mesmo



tema da independência.”

PRADO, Maria Ligia C. “A pintura e a construção das identidades nacionais na América Latina”. *Nossa América, Revista do Memorial da América Latina*, n. 59, 2022; p. 22 e 23. Adaptado.

Com base no texto e na leitura das imagens, responda:

- a) Como, no tema da tela pintada por Blanes, se articulam as histórias do Brasil e do Uruguai?
- b) Que elementos corroboram a ideia de pompa na pintura de Pedro Américo e de despojamento na de Blanes? Indique um elemento de cada imagem.
- c) Como, na visão da autora, as pinturas se relacionam com os regimes políticos adotados, após as independências, no Brasil e no Uruguai?

### **Resolução**

- a) **O Uruguai, naquele momento, era a Província da Cisplatina, pertencente ao Império do Brasil. A tela retrata a reunião de lideranças políticas da região para se libertarem do domínio brasileiro.**
- b) **Ideia de pompa: a vestimenta militar de D. Pedro I; a personagem principal em destaque em primeiro plano; e a presença da guarda da honra do imperador, atualmente conhecida como Dragões da Independência.**  
**Ideia de despojamento: a centralidade na bandeira, inclusive com o feixe de luz incidindo sobre ela; as personagens encontram-se no mesmo plano; e os trajes não apresentam nem luxo nem diferenças significativas entre eles.**
- c) **No caso brasileiro, a autora, ao ressaltar o elemento luminoso, confere ao regime monárquico o papel preponderante de uma personagem que teria liderado o processo de independência e também sobre ele repousava o comando da nação. Já no quadro de Blanes, a luminosidade atravessa a cena em direção à bandeira, demonstrando a presença de uma coletividade representativa de ideais republicanos na conjunção das trinta e três personagens, sem reconhecer a supremacia de um líder dinástico.**

## H.02

“Os operários não deviam ser proibidos de pensar. Na época do velho, o mineiro vivia como um animal, enterrado na mina, sem se dar conta do que acontecia. Por isso os ricos podiam chupar o sangue dos operários. Mas esses já estavam acordando. No fundo da terra germinava uma semente, e um belo dia os homens brotariam da terra, um exército de homens que viria restabelecer a justiça. Desde a Revolução Francesa todos os cidadãos não eram considerados iguais?”

ZOLA, Émile. *Germinal*.

São Paulo: Companhia das Letras, 2008, p. 58-59.

Com base na leitura do excerto do romance naturalista *Germinal* publicado na França em 1885,

- indique um tema presente no excerto.
- cite dois elementos que evidenciem as mudanças em curso na condição dos operários.
- exponha duas razões pelas quais a Revolução Francesa é mencionada na denúncia das injustiças.

### Resolução

- Temas que poderiam ser apresentados: a Revolução Industrial; a exploração dos trabalhadores das minas de carvão; a luta de classes; e a crítica ao ideário burguês de igualdade estabelecido desde a Revolução Francesa.**
- Exemplos que evidenciam as mudanças em curso: a conscientização do movimento operário; a luta pela superação da alienação e pela igualdade; o projeto de uma sociedade com justiça social; a organização como forma de resistência e luta; e a presença das ideologias operárias (marxismo e anarquismo).**
- Podemos citar a falência da igualdade burguesa defendida na Revolução Francesa; a resignificação do tempo histórico com a mudança do próprio calendário que, no entanto, não resultou nas alterações sociais prometidas; o cerceamento da liberdade de pensamento (racionalismo iluminista) contrário aos ideais do movimento de 1789; e a limitação da cidadania a alguns setores sociais.**

## H.03



Audiência de portugueses com o rei do Congo, século XVII.

LOPES, David. "The destruction of the Kingdom of Kongo".  
*Civil Rights Journal* (Vol. 6, Issue 1). p. 35. Winter 2002.

O reino do Congo se formou a partir da mistura, por meio de casamentos, de uma elite tradicional com uma elite nova, descendente dos estrangeiros que vieram do outro lado do rio. Isso ocorreu no início do século XV, e quando os portugueses a ele chegaram (o primeiro contato se deu em 1483), encontraram uma sociedade hierarquizada, com aglomerados populacionais que funcionavam como capitais regionais e uma capital central, na qual o mani Congo, como o obá do Benin e muitos outros chefes de grupos diversos, vivia em construções grandiosas, cercado de suas mulheres e filhos, conselheiros, escravos e ritos.

SOUZA, Marina de Mello e. *África e Brasil africano*.  
São Paulo: Ática, 2008. p. 38.

A partir da leitura da imagem e do texto, responda às questões a seguir:

- De que forma a caracterização do reino do Congo como uma sociedade hierarquizada é representada na imagem?
- Cite dois elementos da imagem que remetem a símbolos europeus de realeza.
- Como a imagem representa as relações entre as nações europeias e os reinos africanos no início da Idade Moderna?



### **Resolução**

- a) O rei e sua corte estão num estrato superior em relação às demais figuras e à centralidade do rei.
- b) A presença de coroa, cetro, dossel sobre o trono, o manto real e o próprio destaque dado à figura do rei.
- c) Não há a representação de domínio e superioridade dos europeus em relação aos africanos; o reconhecimento de reinos bem organizados, poderosos e importantes na África; a aceitação da liturgia africana para se apresentar ao rei; e a negociação para a obtenção de mercadorias, entre elas os escravizados.

## H.04

Sobre o movimento cultural denominado Tropicália que se desenvolveu nos anos 1960 associado à era dos Festivais, responda:

- Cite o nome de um(a) artista ou de uma canção identificada com o movimento.
- Aposte duas características do movimento.
- Indique uma diferença da Tropicália em relação às denominadas canções de protesto e outro em relação à Jovem Guarda.

### Resolução

- Podemos destacar as músicas *É proibido proibir e Alegria, Alegria* (Caetano Veloso), *Aquele abraço* (Gilberto Gil) e *Panis et circenses* (Caetano Veloso e Gilberto Gil, cantada por Os Mutantes)
- A tropicália rompeu com os padrões estéticos vigentes até então, concatenando audaciosamente diferentes estilos artísticos (universalismo) – passando pelo *rock*, música erudita e diferentes elementos da cultura popular. As apresentações eram marcadas por roupas coloridas, cabelos compridos e letras que debochavam dos valores tradicionais burgueses e ligadas ao movimento de contracultura (movimento *hippie*).
- Os artistas do tropicalismo, embora ridicularizassem o *status quo*, não faziam críticas mais assertivas contra a ditadura como se percebia nas chamadas “canções de protesto”.

Em relação à Jovem Guarda, o tropicalismo apresentava, ainda que de forma hermética e incompreensível para muitos, uma crítica social nunca vista no repertório do movimento musical encabeçado por Roberto e Erasmo Carlos, cuja temática se desenvolvia basicamente nas aventuras amorosas de jovens embalados por *hits* estrangeiros.

## H.05

“A Biblioteca de Alexandria cria um espaço abstrato do qual sábios de origens diversas vão poder apropriar-se. Esse espaço é o do helenismo, horizonte comum de textos, crenças, modelos intelectuais e tradições, que dependem, doravante, de tarefas coletivas – arquivar, editar, comentar, elaborar mapas, escrever a história, recensar. Poder-se-ia dizer que uma das chaves da cultura alexandrina é a relação paradoxal que ela mantém com a memória. A ausência de uma tradição e de uma memória locais explica talvez como a biblioteca, esse lugar de memória artificial, criado por uma política voluntarista, terá podido atrair e reter gregos de todas as origens.”

JACOB, Christian. “Ler para escrever: navegações alexandrinas”.

In: BARATIN, Marc e JACOB, Christian. *O poder das bibliotecas*.

Rio de Janeiro: Ed.UERJ, 2000, p. 53-54. Adaptado.

Com base na leitura do texto, responda às questões:

- O que foi o helenismo?
- Cite dois exemplos que indicam a relação entre a cultura alexandrina e a memória.
- Indique dois elementos que tornaram possível aos pensadores humanistas (séculos XIV-XVI) se apropriarem do patrimônio cultural clássico.

### Resolução

- O helenismo compreende o universo cultural criado pela fusão da chamada cultura greco-macedônica com os valores do Oriente, em especial do Egito e da Pérsia, dominados por Alexandre Magno a partir do século IV a.C.**
- Podemos citar a própria biblioteca de Alexandria como exemplo dessa relação entre cultura alexandrina e memória. Fundada no Egito após a criação da cidade de Alexandria, a biblioteca foi depositária de saberes oriundos de diferentes partes do Ocidente e do Oriente que se entrelaçaram. Um outro aspecto é a construção de uma memória, lapidada a partir dos interesses políticos e sintetizando as particularidades das diferentes sociedades em busca de uma homogeneidade forjada na submissão de diferentes grupos culturais. Por fim, podemos citar também o culto à figura de Alexandre, o Grande como personificador das mais importantes realizações culturais.**
- Elementos: a tradução das obras clássicas preservadas pelos centros culturais muçulmanos, em especial na Península Ibérica; os contatos culturais estabelecidos no movimento das Cruzadas, tanto da parte oriental como ocidental; as relações entre cristãos e islâmicos, intensificadas no Renascimento Comercial e Urbano; a preservação de algumas obras pelos monges**

copistas do período medieval nas bibliotecas das grandes abadias da Europa Ocidental; e o intercâmbio com os sábios oriundos do Império Bizantino, já decadente.

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

**OBJETIVO**

## H.06



BARDI, Pietro Maria. *Coleção Arte e Cultura*. Vol. VI.  
São Paulo: Banco Sudameris, 1983. p. 59.

Com base na leitura da Carta das Estradas de Ferro da Província de São Paulo (ca. 1880), responda:

- Que atividade econômica subsidia a configuração da rede ferroviária na província de S. Paulo?
- Indique dois elementos que atestam a importância da cidade de Santos nessa rede de transporte.
- Relacione o traçado das ferrovias com as dinâmicas econômicas e sociais da província paulista no século XIX.

### Resolução

- O avanço da rede ferroviária está diretamente atrelado à expansão cafeeira.
- A cidade de Santos possuía os seguintes elementos: era o destino final da malha ferroviária paulista; maior ponto de armazenagem; local onde eram realizadas as negociações dos comissários com os compradores estrangeiros; e principal porto de embarque do café para o exterior.
- As ferrovias seguiam as novas áreas de expansão da cafeicultura pelo interior do estado. Ao longo dos traçados, no entorno das estações, surgiram diversas aglomerações urbanas com a implantação de serviços e atividades comerciais. Decadência do tropeirismo substituído pelas estradas de ferro, cujo volume transportado era mais expressivo. Surgimento de uma nova elite rural, a burguesia cafeeira, nas cidades do interior, principalmente no Oeste Paulista, cuja mentalidade buscava maior produtividade e lucratividade. Transporte de expressivo fluxo de imigrantes como trabalhadores livres para viabilizar a produção do café. Presença de trabalhadores estrangeiros especializados na construção das linhas férreas. Surgimento de classes médias trabalhando no setor de serviços.