## 1

Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

a) 23

b) 26

c) 29

d) 32

e) 39

**Resolução**

1) **Primeiramente observemos que o irmão que nasceu no século XX não nasceu em 2000, pois neste caso, teria 18 anos e 18 não é a soma dos três últimos dígitos de 2000.**
2) **Seja "19ab" o ano de nascimento do irmão que nasceu no século XX. Esse irmão possui (2018 – "19ab") anos de idade. Assim,**
**2018 – "19ab" = 9 + a + b ⇔**
**⇔ 2000 + 18 – 1900 – "ab" = 9 + a + b ⇔**
**⇔ 109 = 11a + 2b. Sendo *a* e *b* algarismos, esta equação só admite a solução a = 9 e b = 5.**
**Desta forma, esse irmão nasceu em 1995 e em 2018 completou 23 anos.**
3) **Seja "20cd" o ano de nascimento do irmão que nasceu no século XXI. Esse irmão possui (2018 – "20cd") anos de idade.**
**Assim, 2018 – "20cd" = 0 + c + d ⇔**
**⇔ 18 – "cd" = c + d ⇔ 18 = 11c + 2d. Sendo *c* e *d* algarismos, esta equação só admite a solução c = 0 e d = 9. Desta forma, este irmão nasceu em 2009 e em 2018 completou 9 anos.**
4) **Por fim, em 2018 a soma das idades foi 23 + 9 = 32 anos.**

**Resposta:** D

## 2

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$.

O valor de $\text{sen}(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é:

a) $-1$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

**Resolução**

**Seja *r* a razão da progressão aritmética $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots; \theta_{100}$.**

1) $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} =$

$$= (\theta_1 + 10r) + (\theta_1 + 25r) + (\theta_{100} - 25r) +$$

$$+ (\theta_{100} - 10r) = 2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_{100} = \frac{\pi}{8}$$

2) $$\sum_{i=1}^{100} \theta_i = \frac{(\theta_1 + \theta_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{\frac{\pi}{8} \cdot 100}{2} = \frac{25\pi}{4}$$

Como $\frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$, temos

$$\text{sen}\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = \text{sen}\left(\frac{25\pi}{4}\right) =$$

$$= \text{sen}\left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Resposta:** D

# 3

Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

**Resolução**

**I) Observe que:**

**a)** $\log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3$

**b)** $\log 900 = \log 100 + \log 9 = 2 + 2\log 3 =$
$= 2(1 + \log 3)$

**c)** $\log 300 = \log 100 + \log 3 = 2 + \log 3$

**d)** $(\log 9)^2 = (2\log 3)^2 = 4(\log 3)^2$

**e)** $2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 =$
$= 2[1 + 2\log 3 + (\log 3)^2] = 2(1 + \log 3)^2$

**2)**
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4\log 3 & 2(1+\log 3) & 2+\log 3 \\ 4(\log 3)^2 & 2(1+\log 3)^2 & (2+\log 3)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \,.\, 2 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & (1+\log 3) & (2+\log 3) \\ (\log 3)^2 & (1+\log 3)^2 & (2+\log 3)^2 \end{vmatrix} =$$

$= 8 \,.\, [(1+\log 3) - \log 3] \,.\, [(2+\log 3) - \log 3] \,.$

$. \,[(2+\log 3) - (1+\log 3)] = 8 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 1 = 16$, **pois o determinante final é de Vandermonde.**

**Resposta:** $\boxed{E}$

# 4

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para b – a é:

a) 2

b) $\dfrac{13}{6}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{8}{3}$

**Resolução**

**1) Consideremos a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por**

$f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x =$

$= x(6x^3 - 5x^2 - 29x + 10)$.

**As possíveis raízes racionais da equação**

$6x^3 - 5x^2 - 29x + 10 = 0$ **são** $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10;$

$\pm \dfrac{1}{2}; \pm \dfrac{5}{2}; \pm \dfrac{1}{3}; \pm \dfrac{2}{3}; \pm \dfrac{5}{3}; \pm \dfrac{10}{3}; \pm \dfrac{1}{6}; \pm \dfrac{5}{6}$

**Observemos que – 2 é raíz da equação, pois**

$6 \,.\, (-2)^3 - 5 \,.\, (-2)^2 - 29 \,.\, (-2) + 10 =$

$= -48 - 20 + 58 + 10 = 0$

**Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini resulta**

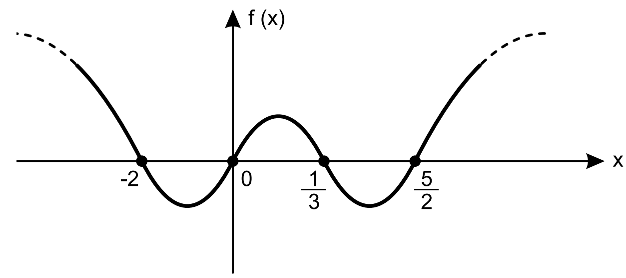
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | –5 | –29 | 10 | –2 |
| 6 | –17 | 5 | 0 | |

**As raízes da equação** $6x^2 - 17x + 5 = 0$ **são**

$\dfrac{5}{2}$ **e** $\dfrac{1}{3}$

**Desta forma,** $f(x) = x(x + 2)\left(x - \dfrac{5}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

**2) O gráfico de f é do tipo**




**3) Do gráfico conclui-se que**

$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x < 0$ **ou** $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{2}$

**Se o intervalo (a; b) está contido no conjunto solução dessa inequação, então:**

$-2 \leqslant a < b \leqslant 0$ **ou** $\dfrac{1}{3} \leqslant a < b \leqslant \dfrac{5}{2}$

**Para a = – 2 e b = 0, temos:**

$b - a = 0 - (-2) = 2$

**Para** $a = \dfrac{1}{3}$ **e** $b = \dfrac{5}{2}$**, temos:**

$b - a = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{6} > 2$

**Assim, o maior valor possível para b – a e** $\dfrac{13}{6}$

**Resposta: B**

## 5

Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$ raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) $48$

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

**Resolução**

**Se $x_1$, $x_2$ e $x_3$ são as raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$, então pelas relações de Girard $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.**

**Além disso,**

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 - ax_1 - 16 = 0 \\ x_2^3 - ax_2 - 16 = 0 \\ x_3^3 - ax_3 - 16 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - a\,.\,(0) - 48 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48$$

**Resposta: C**

## 6

Seja z um número complexo tal que $z^{12} \in \mathbb{R}$, Re(z) = 1 e $\arg(z) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. A soma dos inversos dos possíveis valores de $|z|$ está no intervalo:

a) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

b) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

c) $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

d) $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

e) $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$

**Resolução**

**1)** $z^{12} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{sen}[\arg(z^{12})] = 0 \Leftrightarrow \arg(z^{12}) = k\pi$, **com** $k \in \mathbb{Z}$. **Desta forma,** $12 \cdot \arg(z) = k\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{k\pi}{12} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

**2)** $\text{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow z = 1 + ai$, **com** $a \in \mathbb{R}_+$, **pois** $\arg(z) \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

**Além disso,** $\text{tg}[\arg(z)] = \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow a = \text{tg}\left(\dfrac{k\pi}{12}\right)$

**Desta forma,** $z = 1 + \text{tg}\left(\dfrac{k\pi}{12}\right)i$ **e**

$$|z| = \sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\frac{k\pi}{12}\right)} = \sqrt{\sec^2\left(\frac{k\pi}{12}\right)} =$$

$$= \sec\left(\frac{k\pi}{12}\right) = \frac{1}{\cos\left(\dfrac{k\pi}{12}\right)}$$

$= \dfrac{1}{|z|} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{12}\right)$ **e a soma dos possíveis valores de** $\dfrac{1}{|z|}$ **é** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) =$

$$= 2\cos\left[\frac{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12}}{2}\right] \cos\left[\frac{\dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12}}{2}\right] + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{2} \simeq \frac{2{,}41 \cdot 2{,}73}{2} \simeq$$

$$\simeq 3{,}29 \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

**Resposta:** Ⓒ

## 7

Definimos a função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n),\ n \geq 1 \\ f(2n+1) = n^2,\ n \geq 1 \end{cases}$$

Definimos a função g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:
$g(n) = f(n)\, f(n+1)$.

Podemos afirmar que:

a) g é uma função sobrejetora.

b) g é uma função injetora.

c) f é uma função sobrejetora.

d) f é uma função injetora.

e) g(2018) tem mais do que 4 divisores positivos.

**Resolução**

**1) Da igualdade $f(2n) = f(n),\ n \geq 1$ tem-se**
**$f(2^k) = f(2 \cdot 2^{k-1}) = f(2 \cdot 2^{k-2}) = \ldots = f(2) = f(1) = 1$**
**Assim, todas as potências de 2 tem imagem igual a 1.**

**2) Da igualdade $f(2n + 1) = n^2,\ n \geq 1$ tem-se**
**$f(3) = f(2 \cdot 1 + 1) = 1$. As imagens de todos os demais números ímpares é um quadrado perfeito diferente de 1, portanto diferente de 3.**

**3) A imagem de qualquer outro número par que não é potência de 2, e igual a imagem de um número ímpar e, portanto, diferente de 3.**

**4) Como $3 \in CD(f)$, $3 \in CD(g)$, $3 \notin Im(f)$ e $3 \notin Im(g)$, nem f, nem g são sobrejetoras.**

**5) $f(2) = f(1) = 1$, portanto f não é injetora.**
**$g(1) = f(1) \cdot f(2) = 1 \cdot 1 = 1$ e**
**$g(2) = f(2) \cdot f(3) = 1 \cdot 1 = 1$ e**
**g não é injetora, pois $g(1) = g(2)$**

**6) $g(2018) = f(2018) \cdot f(2019) = f(1009) \cdot f(2019) =$**
**$= 504^2 \cdot 1009^2$ que possui mais do que 4 divisores positivos.**

**Resposta: E**

## 8

Em um jogo de RPG "*Role-Playing Game*" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{76}$

c) $\dfrac{9}{400}$

d) $\dfrac{1}{80}$

e) $\dfrac{3}{80}$

**Resolução**

**A tabela simplificada a seguir apresenta os 400 resultados possíveis do lançamento dos dois dados.**

| | 1 | 2 | 3 | ... | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | 15;20 |
| 16 | | | | | | | | | 16;19 | 16;20 |
| 17 | | | | | | | | 17;18 | 17;19 | 17;20 |
| 18 | | | | | | | 18;17 | 18;18 | 18;19 | 18;20 |
| 19 | | | | | | 19;16 | 19;17 | 19;18 | 19;19 | 19;20 |
| 20 | | | | | 20;15 | 20;16 | 20;17 | 20;18 | 20;19 | 20;20 |

**Eu só vencerei o jogo se obtiver um dos 15 resultados em destaque na tabela. A probabilidade disso ocorrer é $\dfrac{15}{400} = \dfrac{3}{80}$**

**Resposta: E**

# 9

Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio R. São sorteados 3 vértices distintos do hexágono, a saber: A, B e C. Seja r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC. Qual a probabilidade de que $r = \frac{R}{2}$?

a) 0

b) $\frac{1}{10}$

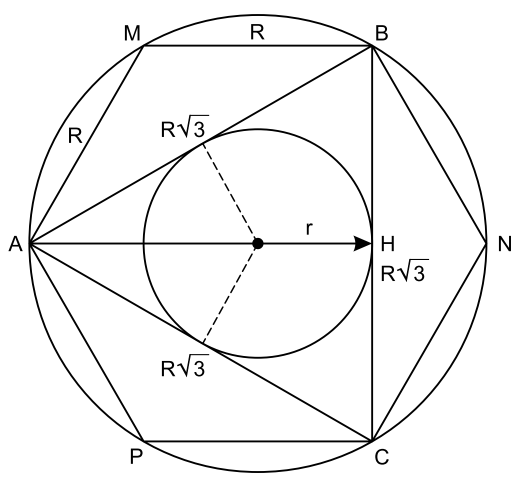
c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{1}{20}$

e) $\frac{1}{6}$

**Resolução**

**1) O raio r do círculo inscrito ao triângulo ABC somente será igual a $\frac{R}{2}$ se os vértices ABC do hexágono regular forem alterados, como na figura seguinte.**




$$AB = BC = AC = R\sqrt{3} \text{ e}$$

$$r = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}$$

**2) Das $C_{6;3} = \binom{6}{3} = 20$ formas de escolher três dos 6 vértices existem apenas *dois* casos em que os três vértices escolhidos estão alternados; ABC ou MNP. A probabilidade disso ocorrer é**

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

**Resposta:** B

# 10

O número de soluções reais da equação abaixo é:

$$(\cos x)^{2018} = 2 - 2^{(x/\pi)^2}$$

a) 0

b) 1

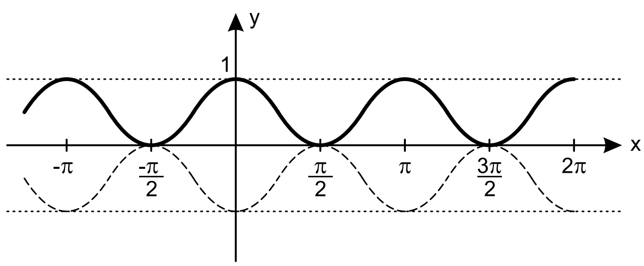
c) 2

d) 3

e) 4

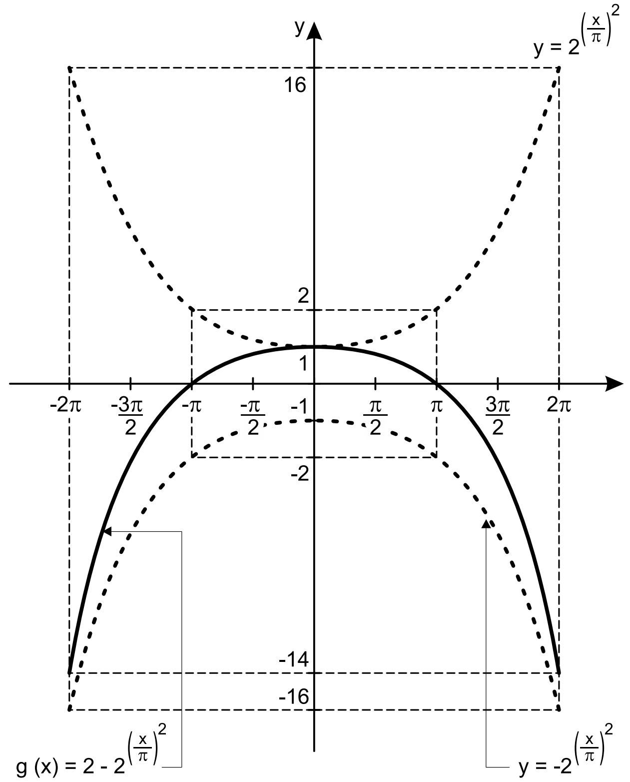
**Resolução**

**1) Considerando que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ e $0 \leqslant (\cos x)^{2018} \leqslant 1$, o gráfico que melhor representa a função $f(x) = (\cos x)^{2018}$ é uma "cossenoide distorcida" do tipo**

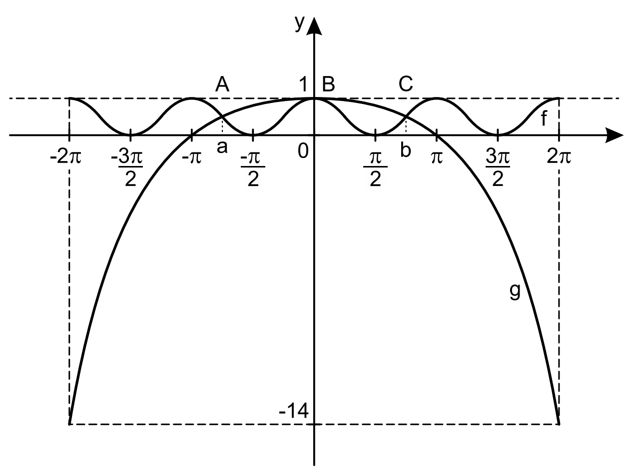



**2) A figura seguinte mostra o gráfico da função**

$$g(x) = 2 - 2^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$$




**3) Os gráficos das funções f(x) e g(x) definidas nos itens (1) e (2) estão juntos na figura seguinte:**




**Observe, que os dois gráficos interceptam-se em 3 pontos (A, B e C) e, portanto, a equação possui 3 soluções reais (a, 0 e b).**

**Resposta:** D

## 11

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

a) $2\text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) + \text{sen}(\hat{C})$

b) $2\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \cos(\hat{A}) + \cos(\hat{C})$

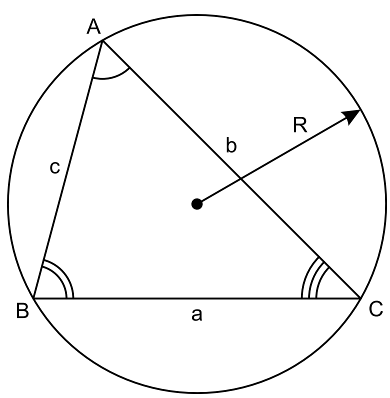
c) $2\text{sen}(\hat{A} - \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) - \text{sen}(\hat{C})$

d) $2\cos(\hat{A} - \hat{C}) = \cos(\hat{A}) - \cos(\hat{C})$

e) $2\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}(\hat{A}) + \text{sen}(\hat{C})$

**Resolução**

**1) Pela lei dos senos;**




$\mathbf{a = 2R\ sen\,\hat{A}}$

$\mathbf{b = 2R\ sen\,\hat{B}}$

$\mathbf{c = 2R\ sen\,\hat{C}}$

**2) Como (a; b; c) é uma progressão aritmética,**

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2R\ \text{sen}\,\hat{B} = 2R\ \text{sen}\,\hat{A} + 2R\ \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ \text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{C}\ \text{(I)}$$

**3) Como** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Leftrightarrow \hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}[180° - (\hat{A} + \hat{C})] = \text{sen}(\hat{A} + \hat{C})$$

**Substituindo em (I) resulta:**

$$2\ \text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{C}$$

**Resposta: A**

## 12

Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

a) $xy = 2$

b) $x^2 + xy - y^2 = 4$

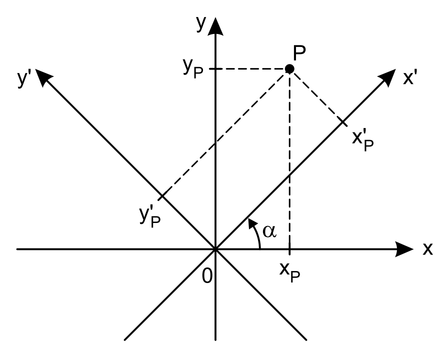
c) $x^2 - y^2 = 2$

d) $xy = -2$

e) $x^2 - y^2 = -2$

**Resolução**

**1)**




**Pode-se demonstrar que a transformação das coordenadas ($x'_p$; $y'_p$) do ponto P, no sistema cartesiano x'Oy', para as coordenadas ($x_p$; $y_p$) do mesmo ponto no sistema cartesiano xOy é obtida pelas relações.**

$x'_p = x_p \cos\alpha + y_p\ \text{sen}\,\alpha$ **e**

$y'_p = y_p \cos\alpha - x_p\ \text{sen}\,\alpha.$

**No caso em que** $\alpha = 45°$ **tem-se**

$$x'_p = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_p + y_p) \text{ e } y'_p = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_p - x_p)$$

**2) No sistema x'Oy' a equação da hipérbole equilátera de eixo igual a 4 é** $\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1$

$x'^2 - y'^2 = 4$. **No sistema xOy a equacão da mesma hipérbole é** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - (y - x)^2 = 8 \Leftrightarrow xy = 2$$

**Resposta: A**

# 13

Em um setor circular de 45°, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a R, inscreve-se um quadrado MNPQ, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto Q sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

a) 4R

b) 2R

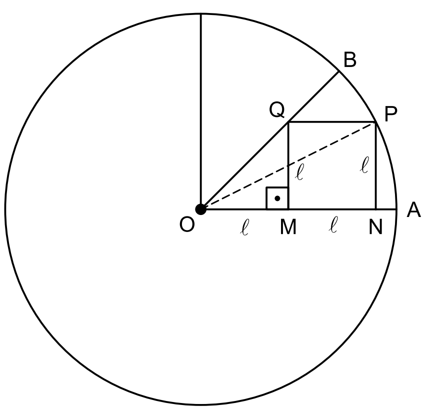
c) $2R\sqrt{2}$

d) $4R\sqrt{5}$

e) $4R\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

**Resolução**

**Seja $\ell$ a medida do lado do quadrado e R a medida do raio da circunferência.**




**1) O triângulo OMQ é retângulo e isósceles e, portanto, OM = MQ = $\ell$.**

**2) No triângulo retângulo ONP tem-se**

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 \Rightarrow R^2 = (2\ell)^2 + \ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \ell\sqrt{5} \Leftrightarrow \ell = \frac{R}{\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

**Assim, o perímetro do quadrado é** $4\ell = \dfrac{4R\sqrt{5}}{5}$

**Resposta: E**

## 14

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a) apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

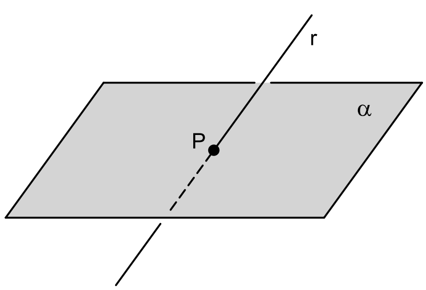
d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

**Resolução**

**I)** ***Verdadeira*****: Pontos colineares estão contidos em uma reta e qualquer reta está contida em algum plano.**

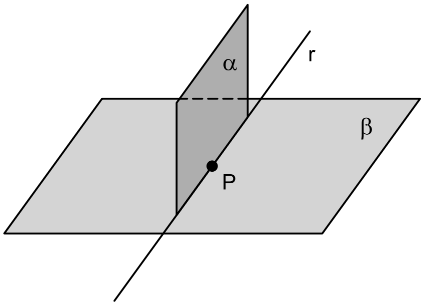
**II)** ***Falso*****. Ela pode ser incidente ao plano**




**III)** ***Falso*****: Se quatro pontos são não coplanares, três quaisquer deles nunca estão alinhados e, portanto, determinam um plano. O número de planos determinados é $C_{4;3} = 4$.**

**IV)** ***Falso*****: Elas podem ser reversas e, neste caso, não determinam plano.**

**V)** ***Verdadeiro*****: Se eles são distintos e tem um ponto em comum, são secantes e, neste caso, possuem uma reta em comum.**




**Resposta:** B

# 15

Em um tetraedro ABCD, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do $\Delta$ABC é igual à área do $\Delta$ACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\hat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro ABCD, em $cm^2$, sabendo que BC = 2cm, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 30°.

a) $(2 - \sqrt{3})$

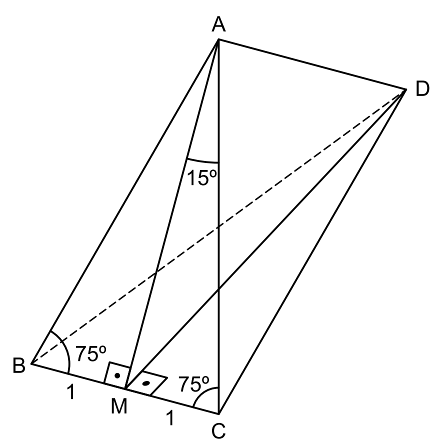
b) $(2 + \sqrt{3})$

c) $4(2 - \sqrt{3})$

d) $4(2 + \sqrt{3})$

e) 4

**Resolução**




**1) Se $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$, então o triângulo ABC é isósceles, de base $\overline{BC}$ e, como M é o ponto médio de $\overline{BC}$, $\overline{AM} \perp \overline{BC}$.**

**2) $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais. Assim, $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano ADM e $\overline{DM} \perp \overline{BC}$.**

**3) Como $M\hat{A}D \cong M\hat{D}A$, o triângulo AMD é isósceles de base $\overline{AD}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MD}$.**

**4) Assim, pode-se concluir que: $\Delta ABC \cong \Delta DBC$, $\Delta ACD \cong \Delta ABD$, $M\hat{A}C = \dfrac{B\hat{A}C}{2} = \dfrac{30°}{2} = 15°$ e $A\hat{C}M = 75°$**

**5) No triângulo retângulo AMC, retângulo em M, temos:**

$$\text{tg } 75° = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{1} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow A = 2 + \sqrt{3}$$

**6) A área $S_{ABC}$, do triângulo ABC, é tal que**

$$S_{ABC} = \frac{BC \,.\, AM}{2} = \frac{2 \,.\, (2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

**7) Como as áreas dos triângulos ABC e ACD são iguais, as quatro faces do tetraedro tem a mesma área e a área total do tetraedro é, portanto, $S = 4(2 + \sqrt{3})$.**

**Resposta:** D