NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária, $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re(z): parte real do número $z \in \mathbb{C}$
Im(z): parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
det A : determinante da matriz A
tr A : traço da matriz quadrada A, que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de A.
Potência de matriz: $A^1 = A, A^2 = A \, . \, A, \ldots, A^k = A^{k-1} \, . \, A$, sendo A matriz quadrada e k inteiro positivo.
d(P, r): distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$: segmento de extremidade nos pontos A e B
$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a \leqslant x < b\}$
$]a, b]$: $\{x \in \mathbb{R};\ a < x \leqslant b\}$
$]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
$X \backslash Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ell n \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma. b) apenas II. c) apenas I e II.
d) apenas I e III. e) I, II e III.

Resolução

I) Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, x é uma dízima periódica e, portanto, racional.

II) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\,.\,\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\,.\,2} + \ldots = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

III) $\ell n \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)\,.\,(\log_4 9) =$

$$= \ell n\, e^{\frac{2}{3}} + (\log_3 2)\,.\left(\frac{\log_3 9}{\log_3 4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\,\ell n\, e + (\log_3 2)\,.\left(\frac{2\log_3 3}{2\log_3 2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$, que é racional.

Assim, (I) e (III) são verdadeiras.

Resposta: D

2

Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \{z \in \mathbb{C}: |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C}: |z + i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C}: z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto

a) $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$.

b) $\{-3 - i, -3 + i\}$.

c) $\{-3 + i\}$.

d) $\{-3 - i\}$.

e) $\{-1 + 3i\}$.

Resolução

I) $\mathbf{z^2 + 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i}$

II) $\mathbf{|(-3 + i) + 2 - 3i| = |-1 - 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} < \sqrt{19} \Rightarrow}$
$\mathbf{\Rightarrow -3 + i \in A}$

III) $\mathbf{|(-3 + i) + i| = |-3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} > \dfrac{7}{2} \Rightarrow}$
$\mathbf{\Rightarrow -3 + i \notin B}$

IV) $\mathbf{-3 + i \in (A \setminus B) \cap C}$

V) $\mathbf{|(-3 - i) + 2 - 3i| = |-1 - 4i| =}$
$\mathbf{= \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} < \sqrt{19} \Rightarrow -3 - i \in A}$

VI) $\mathbf{|(-3 - i) + i| = |-3| = 3 < \dfrac{7}{2} \Rightarrow -3 + i \in B}$

VII) $\mathbf{-3 + i \in A \cap B \Rightarrow -3 + i \notin A \setminus B \Rightarrow}$
$\mathbf{\Rightarrow -3 + i \notin (A \setminus B) \cap C}$

Resposta: C

Se $z = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$, então o valor de

2 arcsen (Re(z)) + 5 arctg(2 Im(z)) é igual a

a) $-\dfrac{2\pi}{3}$. b) $-\dfrac{\pi}{3}$. c) $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) $\dfrac{4\pi}{3}$. e) $\dfrac{5\pi}{3}$.

Resolução

I) $$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10} =$$

$$= \left(\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+3}\right)^{10} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10} =$$

$$= \left[1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$$

II) $$\text{Re}(z) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

III) $$\text{Im}(z) = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

IV) $$2\,.\,\text{arc sen}\,(\text{Re}(z)) + 5\,.\,\text{arc tg}\,(2\,\text{Im}(z)) =$$

$$= 2\,.\,\text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right) + 5\,.\,\text{arc tg}\,(\sqrt{3}) =$$

$$= 2\,.\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5\,.\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Resposta: D

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas r : $3x + 4y - 4 = 0$ e s: $3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

a) $\dfrac{5\pi}{7}$. b) $\dfrac{4\pi}{5}$. c) $\dfrac{3\pi}{2}$.

d) $\dfrac{8\pi}{3}$. e) $\dfrac{9\pi}{4}$.

Resolução

As retas r: $3x + 4y - 4 = 0$ e s: $3x + 4y - 19 = 0$ são paralelas. A distância entre elas equivale ao diâmetro da circunferência que as tangencia. Assim:

$$2R = \frac{|-4-(-19)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \Leftrightarrow R = \frac{3}{2}$$

A área do círculo é $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9\pi}{4}$

Resposta: $\boxed{E}$

Seja (a_1, a_2, a_3, ...) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Resolução

A sequência que satisfaz as condições dadas é a sequência de Fibonacci, a saber
(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; …)

I) ***Falsa*, pois se existissem três termos dessa sequência em progressão geométrica, teríamos:**
$a_{p+1} = q \cdot a_p$ e $a_{p+2} = q^2 \cdot a_p$
Como $a_{p+2} = a_{p+1} + a_p \Leftrightarrow q^2 \cdot a_p = q \cdot a_p + a_p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$**, que não é racional. Isto não é possível, pois os termos da sequência de Fibonacci são inteiros e não nulos.**

II) ***Verdadeira*. O sétimo termo da sequência é** $a_7 = 13$**, que é primo.**

III) ***Verdadeira*. Analisando a paridade dos termos da sequência, temos (ímpar, ímpar, par, ímpar, ímpar, par; …)**
Os termos a_3, a_6, a_9, **… serão todos pares e, portanto, se n é múltiplo de 3,** a_n **é par.**

Resposta: D

Considere a equação $\dfrac{a}{1-x^2} - \dfrac{b}{x - 1/2} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se a = 1 e b = 2, então x = 0 é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \dfrac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Resolução

$$\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{a}{1-x^2} - \frac{2b}{2x-1} = 5$$

I) *Verdadeira.* Para a = 1 e b = 2, temos:

$$\frac{1}{1-x^2} - \frac{4}{2x-1} = 5 \Leftrightarrow \frac{(2x-1) - 4(1-x^2)}{(1-x^2)\,.\,(2x-1)} = 5 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2x-1) - 4(1-x^2) = 5(1-x^2)\,.\,(2x-1)$**, com** $x \neq \pm 1$ **e** $x \neq \dfrac{1}{2}$**. Simplificando a equação, obtemos:**

$$10x^3 - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(10x^2 - x - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0,\ x = \frac{1 - \sqrt{321}}{20} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{321}}{20}$$

II) *Verdadeira.* As condições de existência da equação exigem que

$$1 - x^2 \neq 0 \text{ e } x - \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \text{ e } x \neq \frac{1}{2}$$

Assim, – 1, + 1 e $\dfrac{1}{2}$ **nunca serão soluções da equação dada.**

III) *Verdadeira.* Para que $x = \dfrac{2}{3}$ **seja solução da equação, devemos ter**

$$\frac{a}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9a}{5} - 6b = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a - 30b = 25 \Leftrightarrow 3(3a - 10b) = 25$$

Sendo, *a* e *b* inteiros, 3a – 10b é inteiro e 3 . (3a – 10b) é múltiplo de 3. Porém, 25 não é múltiplo de 3. Assim, não existem *a* e *b* inteiros para os quais $x = \frac{2}{3}$ seja solução da equação.

Resposta: E

7

Considere o polinômio p dado por
$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de b – a é igual a

a) –36. b) –12. c) 6.
d) 12. e) 24.

Resolução

O conjunto verdade da equação
$2x^3 + ax^2 + bx - 16 = 0$ é {r; r; 2}, com $r \neq 2$. Assim:

$$r \,.\, r \,.\, 2 = \frac{16}{2} = 8 \Leftrightarrow r = \pm 2 \Rightarrow r = -2, \text{ pois } r \neq 2.$$

O polinômio p(x), na forma fatorada, é

$$p(x) = 2 \,.\, (x + 2)(x + 2)(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16 \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - a = -12$$

Resposta: B

Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$,

com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., 15$, e $a_{15} \neq 0$.

Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Resolução

I) $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) =$
$= (x - 2)(x^2 + 1)$

II) **Se Q(x) e $ax^2 + bx + c$ forem o quociente e o resto da divisão de p(x) por q(x), então**

$$\begin{array}{l|l} p(x) & (x-2)(x^2+1) \\ \hline ax^2+bx+c & Q(x) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(i) = a\,.\,i^2 + b\,.\,i + c \\ p(-i) = a\,.\,i^2 + b(-i) + c \\ p(2) = a\,.\,4 + b\,.\,2 + c \end{cases}$$

III) **$p(i) = p(-i) = 0$, pois i e – i são raízes de p**

IV) **$p(2) = 1$**

V) **De (II), (III) e (IV), temos:**

$$\begin{cases} -a + bi + c = 0 \\ -a - bi + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$$

Resposta: B

Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

a) arctg $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b) arctg $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

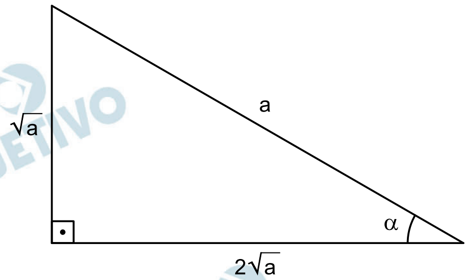
c) arctg $\dfrac{1}{2}$.

d) arctg $\dfrac{3}{5}$.

e) arctg $\dfrac{4}{5}$.

Resolução

Seja o triângulo retângulo cujas medidas são $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a, cuja maior hipotenusa tem medida a, conforme a figura.



A tangente do seu menor ângulo é dada por

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } \alpha = \text{arc tg}\,\frac{1}{2}$$

Observação:

Se $2\sqrt{a}$ é hipotenusa, temos que: $(2\sqrt{a})^2 = a^2 + (\sqrt{a})^2$ e $a = 3$ e, se a é hipotenusa, $a^2 = (\sqrt{a})^2 + (2\sqrt{a})^2$ e $a = 5$; logo, a maior hipotenusa tem medida a.

Resposta: C

Os valores de x $\in$ [0, 2π] que satisfazem a equação 2 sen x – cos x = 1 são

a) $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$ e π.

b) $\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ e π.

c) $\text{arcsen}\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ e π.

d) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ e π.

e) $\arccos\left(\dfrac{4}{5}\right)$ e π.

Resolução

$$2 \text{ sen } x = 1 + \cos x \Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 x) = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{5} \text{ ou } \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \text{arc cos}\left(\frac{3}{5}\right) \text{ ou } x = \pi, \text{ pois } x \in [0; 2\pi]$$

Resposta: A

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \,]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5} \cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \text{ e } \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7} \cos^4 \frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1. b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $-\dfrac{1}{2}$. e) 0.

Resolução

I) $\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{5} \cdot \cos^4 \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{5}$

Fazendo $\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = x$, **temos:**

$$x = \frac{4}{5} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

Para $x = 1 \Rightarrow \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \alpha = n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$$

Para $x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$$

Logo, $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ **ou** $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$, **pois** $\alpha \in \,]0; 2\pi[$

II) $\cos^2 \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{4}{7} \cdot \cos^4 \dfrac{\beta}{3} + \dfrac{3}{7}$

Fazendo $\cos^2 \dfrac{\beta}{3} = y$, **temos:**

$$y = \frac{4}{7} \cdot y^2 + \frac{3}{7} \Leftrightarrow 4y^2 - 7y + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{3}{4}$$

Para $y = 1 \Rightarrow \cos^2 \dfrac{\beta}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos \dfrac{\beta}{3} = \pm 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{3} = n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \beta = n \cdot 3\pi \ (n \in \mathbb{Z})$$

Para $y = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + n\,.\,\pi \Leftrightarrow \beta = \pm\frac{\pi}{2} + n\,.\,3\pi \ (n \in \mathbb{Z})$$

Logo, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ **, ou** $\beta = \dfrac{3\pi}{2}$ **, pois** $\beta \in]\,0; 2\pi\,[$

III) O menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ **é obtido para**

$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ **e** $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ **, pois** $\alpha + \beta \in]\,0; 2\pi\,[$

Portanto,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: B

Seja $A = (a_{ij})_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$, $1 \leq i \,.\, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. tr A é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

Resolução

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 72 \\ 16 & 48 & 80 & 112 & 144 \end{pmatrix}$

2) A 1.ª linha é uma PA de razão 2; a 2.ª linha é uma PA de razão 2^2, a 3.ª linha é uma PA de razão 2^3; a quarta linha de razão 2^4 e a quinta de razão 2^5. Assim sendo, a afirmação (I) é verdadeira.

3) A afirmação (II) é verdadeira, pois as cinco colunas são PG de razão 2.

4) tr A = 1 + 6 + 20 + 56 + 144 = 227, que é um número primo e portanto (III) também é verdadeira.

Resposta: $\boxed{E}$

Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2x2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, $i, j = 1,2$. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252,$$

então o valor de n é igual a

a) 4. b) 5. c) 6. d) 7. e) 8.

Resolução

I) $M = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$M^n = \begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

II) $M + M^2 + M^3 + \ldots + M^n =$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n & n^2 + n\\ 0 & n\end{pmatrix}$$

III) $n \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n & 0\\ n & n\end{pmatrix}$

IV) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}n & n^2 + n\\ 0 & n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}n & 0\\ n & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & n^2 + n\\ -n & 0\end{pmatrix}$$

V) $\det\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = 252 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}0 & n^2 + n\\ -n & 0\end{vmatrix} = 252$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 + n) = 252 \Leftrightarrow n^2(n + 1) = 6^2 \cdot 7 \Leftrightarrow n = 6$$

Resposta: C

Considere os pontos A = (0, –1), B = (0,5) e a reta r: $2x - 3y + 6 = O$. Das afirmações a seguir:

I. d(A, r) = d(B, r).

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

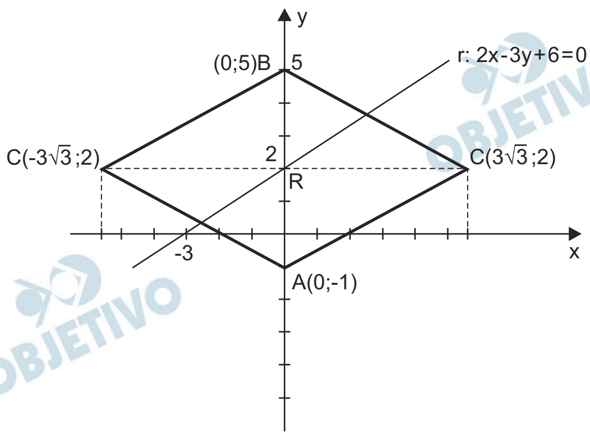
III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (3\sqrt{3}, 2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) I e II.

d) I e III. e) II e III.

Resolução



I) $$d(A;r) = \frac{|2\,.\,0 - 3\,(-1) + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$ **e**

$$d(B;r) = \frac{|2\,.\,0 - 3\,.\,5 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

Assim, d(A; r) = d(B; r)

II) R (0; 2) $\in$ r é ponto médio de $\overline{AB}$. Como $\overline{AB}$ não é perpendicular à reta r, B não é simétrico de A em relação à r.

III) O triângulo ABC é equilátero de lado 6. Sua altura mede

$$\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Assim, as coordenadas de C podem ser

$C(3\sqrt{3}; 2)$ ou $C(-3\sqrt{3}; 2)$

Resposta: D

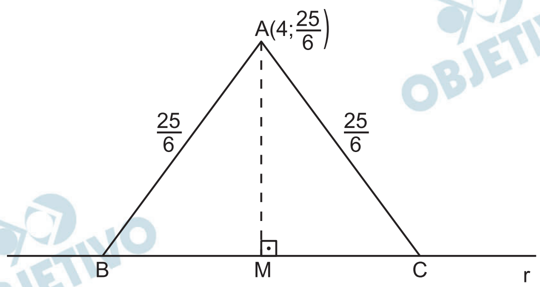
Dados o ponto $A = \left(4, \dfrac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\dfrac{25}{6}$.

Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

a) $\dfrac{22}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$. b) $\dfrac{23}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$. c) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{31}{3}$.

d) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{35}{3}$. e) $\dfrac{25}{3}$ e $\dfrac{40}{3}$.

Resolução



I) A altura do triângulo ABC, relativa à base $\overline{BC}$, é dada por:

$$AM = \frac{\left|3 \cdot 4 + 4 \cdot \dfrac{25}{6} - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{50}{3}}{5} = \frac{10}{3}$$

II) No triângulo retângulo AMC, tem-se:

$$(MC)^2 = (AC)^2 - (AM)^2 =$$

$$= \left(\frac{25}{6}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{225}{36} \Rightarrow MC = \frac{15}{6}$$

III) O triângulo ABC é isósceles, então:

$$BC = 2 \cdot MC = 5$$

IV) Área do triângulo ABC é:

$$\frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{5 \cdot \dfrac{10}{3}}{2} = \frac{25}{3}$$

V) O perímetro do triângulo ABC é:

$$AB + AC + BC = \frac{25}{6} + \frac{25}{6} + 5 = \frac{40}{3}$$

Resposta: E

Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento ℓ fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

III. Os pontos (2, 3), (4, –1) e (3, 1) pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

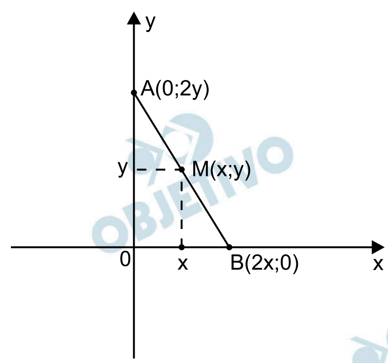
c) apenas III.

d) I e II.

e) I e III.

Resolução

I) ***Verdadeira.***



Sendo M(x; y) o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, de comprimento ℓ, com A (0; 2y) e B (2x; 0), temos, no triângulo OAB, retângulo em O, que

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2y)^2 + (2x)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$ **. Esta é a equação de uma circunferência com centro na origem e raio $\dfrac{\ell}{2}$.**

II) ***Falsa,*** **pois**

$$6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\,(6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\,.\,(2x + y)\,.\,(3x - y - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou}$$

$2x + y = 0$ ou $3x - y - 2 = 0$, que são equações de três retas e, portanto, o lugar geométrico é infinito.

III) *Falsa*. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, os pontos (2; 3), (4; –1) e (3; 1) são colineares e, portanto, não pertencem a uma circunferência.

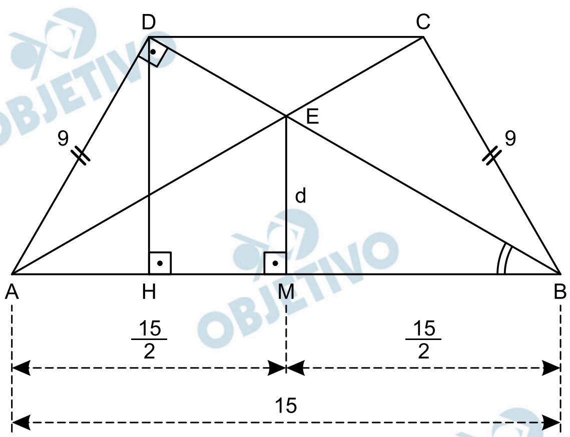
Resposta: A

17

Seja ABCD um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

a) $\dfrac{21}{8}$. b) $\dfrac{27}{8}$. c) $\dfrac{35}{8}$. d) $\dfrac{37}{8}$. e) $\dfrac{45}{8}$.

Resolução



No triângulo retângulo ADB, temos:

I) $(BD)^2 + (AD)^2 = (AB)^2 \Rightarrow (BD)^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BD = 12$

II) $(AB) \,.\, (DH) = (AD) \,.\, (BD) \Rightarrow 15 \,.\, DH = 9 \,.\, 12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow DH = \dfrac{36}{5}$

III) $(BD)^2 = (AB)(BH) \Rightarrow 12^2 = 15 \,.\, BH \Leftrightarrow BH = \dfrac{48}{5}$

Sendo d a distância entre o lado AB e o ponto em que as diagonais se cortam, da semelhança dos triângulos BME e BHD, temos:

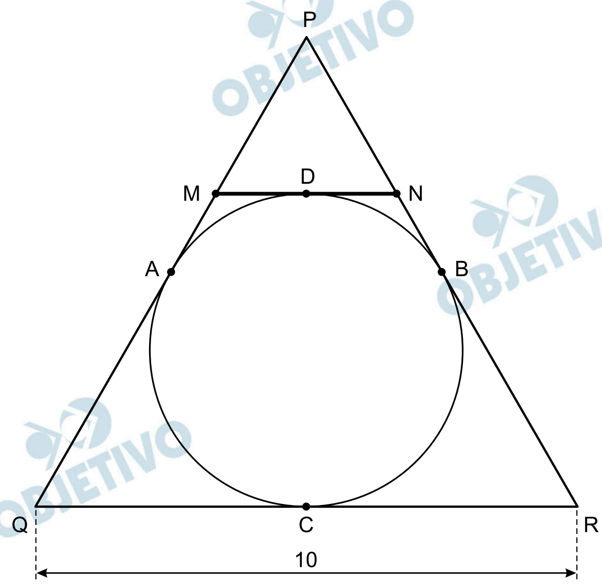
$$\frac{EM}{DH} = \frac{BM}{BH} \Rightarrow \frac{d}{\frac{36}{5}} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{48}{5}} \Leftrightarrow d = \frac{45}{8}$$

Resposta: E

Num triângulo PQR, considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

a) 5. b) 6. c) 8. d) 10. e) 15.

Resolução



Sendo A, B e C os pontos em que os lados do triângulo tangenciam a circunferência inscrita e D o ponto em que o segmento $\overline{MN}$ tangencia a mesma circunferência, temos:

I) $\begin{cases} QA = QC \\ RB = RC \end{cases} \Rightarrow QA + RB = QC + RC = 10$

II) $PQ + QR + RP = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow PA + QA + QC + RC + RB + PB = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow PA + 10 + 10 + PB = 25 \Leftrightarrow PA + PB = 5$

III) Como MA = MD e NB = ND, o perímetro do triângulo PMN é dado por:

$PM + MN + NP = PM + MD + ND + NP =$

$= PM + MA + NB + NP = PA + PB = 5$

Resposta: A

19

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta r : $x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto O = (0, 0) em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

a) $(2, 2\sqrt{2} - 2)$ e $2\sqrt{2} - 2$.

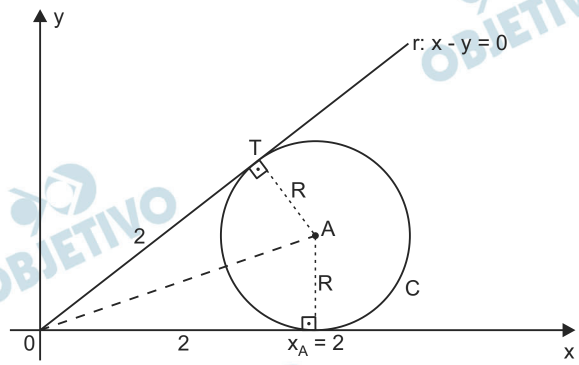
b) $\left(2, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

c) $(2, \sqrt{2} - 1)$ e $\sqrt{2} - 1$.

d) $(2, 2 - \sqrt{2})$ e $2 - \sqrt{2}$.

e) $(2, 4\sqrt{2} - 4)$ e $4\sqrt{2} - 4$.

Resolução



I) Se a potência do ponto O (0;0) em relação à circunferência é 4, então, $OT^2 = 4 \Rightarrow OT = 2$, assim, o centro A da circunferência tem coordenadas A(2;R).

II) A distância do ponto A à reta r equivale ao raio R da circunferência, então

$$R = \frac{|x_A - y_A|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow R = \frac{|2 - R|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot R = |2 - R| \Leftrightarrow 2R^2 = 4 - 4R + R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 + 4R - 4 = 0 \Rightarrow R = 2\sqrt{2} - 2, \text{ pois } R > 0$$

Portanto, o centro é $(2;2\sqrt{2}-2)$ e o raio é $2\sqrt{2}-2$.

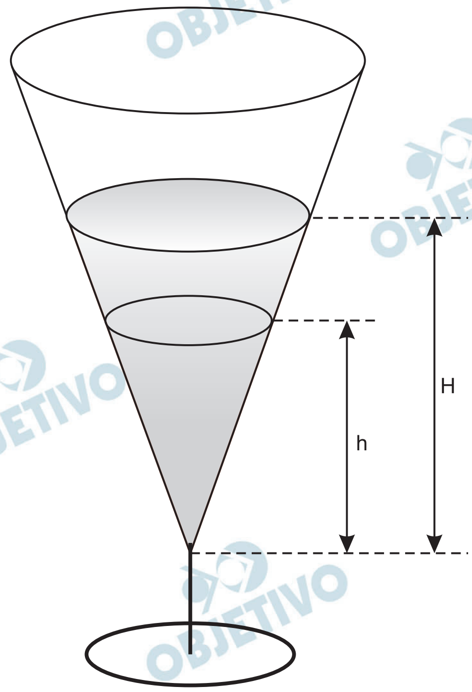
Resposta: A

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$.　　b) $\sqrt[3]{2} - 1$.　　c) $(\sqrt[3]{2} - 1)\, h$.

d) h.　　e) $\dfrac{h}{2}$.

Resolução



Sendo H a distância da superfície do líquido até o vértice após adicionar-se o volume idêntico de líquido na taça, v o volume de líquido inicial e V o volume de líquido final, temos:

$$V = 2 \cdot v \text{ e } \frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{v}{2v} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{h}{H} \Leftrightarrow H = h \cdot \sqrt[3]{2}$$

Assim, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de $H - h = h \cdot \sqrt[3]{2} - h = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \cdot h$

Observação: **É importante destacar que ao adicionar um volume idêntico de líquido na taça, não pode haver transbordamento.**

Resposta: C

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

21

Considere as funções f_1, f_2, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.

b) O menor valor assumido pela função f.

c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Resolução

a) $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x + 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| + 6 = 3|x + 1|$

a.1) Para $x \leq -1$, temos que

$|x| + 6 = 3|x + 1| \Leftrightarrow -x + 6 = 3(-x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$

a.2) Para $-1 \leq x \leq 0$, temos que

$|x| + 6 = 3|x + 1| \Leftrightarrow -x + 6 = 3(x + 1) \Leftrightarrow$

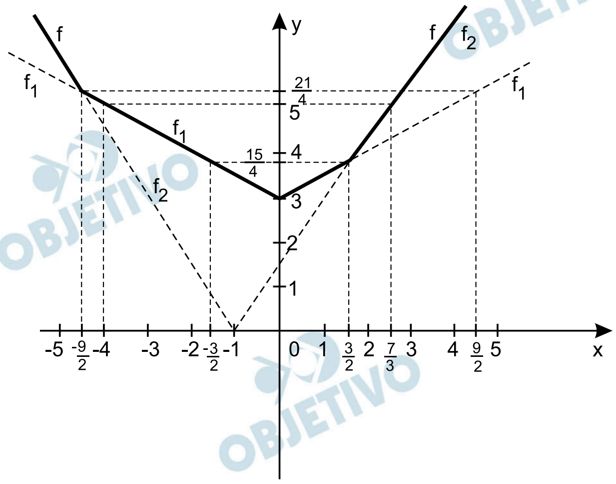
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, **que não pertence ao intervalo $[-1; 0]$**

a.3) Para $x \geq 0$, temos que

$|x| + 6 = 3|x + 1| \Leftrightarrow x + 6 = 3(x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

b) Os gráficos de f_1, f_2 e f estão representados no plano cartesiano seguinte.



Assim, o menor valor de f é 3.

c) A função f fica assim definida

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot |x + 1|, \text{ para } x \le -\dfrac{9}{2} \text{ ou } x \ge \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \cdot |x| + 3, \text{ para } -\dfrac{9}{2} \le x \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Assim:

$$\frac{3}{2}\,|x + 1| = 5 \Rightarrow |x + 1| = \frac{10}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$ (pois $x = -\dfrac{13}{3}$ não pertence ao intervalo considerado)

$\dfrac{1}{2}\,|x| + 3 = 5 \Rightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = -4$ (pois $x = 4$ não pertence ao intervalo considerado)

Respostas: a) $x = -\dfrac{9}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}$

b) $f_{mín}(x) = 3$

c) $x = -4$ ou $x = \dfrac{7}{3}$

Considere o polinômio p dado por

$p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Resolução

I) Se {a + bi; a – bi; r} for o conjunto solução da equação $18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta = 0$, com $a^2 + b^2 = 1$ e $b \neq 0$, então

$$(a + bi)(a - bi)\, r = \frac{\beta}{18} \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \,.\, r = \frac{\beta}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\beta}{18}, \text{ pois } a^2 + b^2 = 1$$

II) Se $\frac{\beta}{18}$ for raiz da equação, então:

$$18 \,.\, \left(\frac{\beta}{18}\right)^3 + \beta \,.\, \left(\frac{\beta}{18}\right)^2 - 7 \,.\, \frac{\beta}{18} - \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \,.\, (\beta^2 + \beta^2 - 126 - 324) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \,.\, (2\beta^2 - 450) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ ou } \beta = \pm\sqrt{225}$$

$$\Leftrightarrow \beta = 0 \text{ ou } \beta = 15 \text{ ou } \beta = -15$$

III) Se $\beta = 0$, a equação será $18z^3 - 7z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \pm\sqrt{\frac{7}{18}} \in \mathbb{R}$ e assim β não pode ser zero, pois,

neste caso, a equação não teria uma raiz igual a a + bi com $b \neq 0$

IV) Se $\beta = 15$, então a equação será

$$18z^3 + 15z^2 - 7z - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 \,.\, \left(z - \frac{15}{18}\right) . (18z^2 + 30z + 18) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{15}{18}\right) . (9z^2 + 15z + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{15}{18} \text{ ou } z = \frac{-15 \pm \sqrt{99}\, i}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5}{6} \text{ ou } z = \frac{-5 \pm \sqrt{11}\, i}{6}$$

V) Se $\beta = -15$, então a equação será

$$18z^3 - 15z^2 - 7z + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 \cdot \left(z + \frac{15}{18}\right)(18z^2 - 30z + 18) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{15}{18} = 0 \text{ ou } 18z^2 - 30z + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{5}{6} \text{ ou } 9z^2 - 15z + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{5}{6} \text{ ou } z = \frac{15 \pm \sqrt{99}\, i}{18} \Leftrightarrow z = -\frac{5}{6} \text{ ou}$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{11}\, i}{6}$$

Respostas: a) $\beta = 15$ ou $\beta = -15$

b) Se $\beta = 15$, o conjunto solução é:

$$\left\{ \frac{5}{6} \;;\; \frac{-5 + \sqrt{11}\, i}{6} \;;\; \frac{-5 - \sqrt{11}\, i}{6} \right\}$$

Se $\beta = -15$, o conjunto solução é:

$$\left\{ -\frac{5}{6} \;;\; \frac{5 + \sqrt{11}\, i}{6} \;;\; \frac{5 - \sqrt{11}\, i}{6} \right\}$$

Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

i) B, C, D, E são dois a dois distintos;

ii) os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

iii) os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

Resolução

I) Se (1; B; C) estão em PA, então $B = \dfrac{C+1}{2}$

II) Se (1; C; E) estão em PA, então $C = \dfrac{E+1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = 2C - 1$

III) (B, C, D, E) estão em PG cuja razão é

$$q = \frac{C}{B} = \frac{C}{\dfrac{C+1}{2}} = \frac{2C}{C+1}$$

IV) $E = C \cdot q^2 \Rightarrow 2C - 1 = C \cdot \left(\dfrac{2C}{C+1}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2C^3 - 3C^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (C - 1) \cdot (2C^2 - C - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 1 \text{ ou } C = -\dfrac{1}{2}$

V) Para C = 1, resulta B = 1, que não convém, pois B e C são distintos.

VI) Para $C = -\dfrac{1}{2}$**, tem-se:**

$$B = \frac{C+1}{2} = \frac{-\dfrac{1}{2}+1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$D = C \cdot q = C \cdot \frac{2C}{C+1} = \frac{2C^2}{C+1} =$$

$$= \frac{2 \cdot \dfrac{1}{4}}{-\dfrac{1}{2}+1} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 1 \text{ e}$$

$$E = 2C - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2$$

Resposta: $B = \dfrac{1}{4}$; $C = -\dfrac{1}{2}$; $D = 1$ e $E = -2$

24

Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por

$M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Determine o maior elemento de M em função de a.

Resolução

Seja $z = x + yi$, com x e y reais, e $|z| = 1$

I) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$

II) $z^2 + az - 1 = (x + yi)^2 + a \,.\, (x + yi) - 1 =$

$= (x^2 + ax - y^2 - 1) + (2xy + ay)\, i =$

$= [x^2 + ax - (1 - x^2) - 1] + y\,(2x + a)\, i =$

$= (2x^2 + ax - 2) + y\,(2x + a)\, i$

III) $|z^2 + az - 1|^2 = (2x^2 + ax - 2)^2 + y^2\,(2x + a)^2 =$

$= (2x^2 + ax - 2)^2 + (1 - x^2)\,(4x^2 + 4ax + a^2) =$

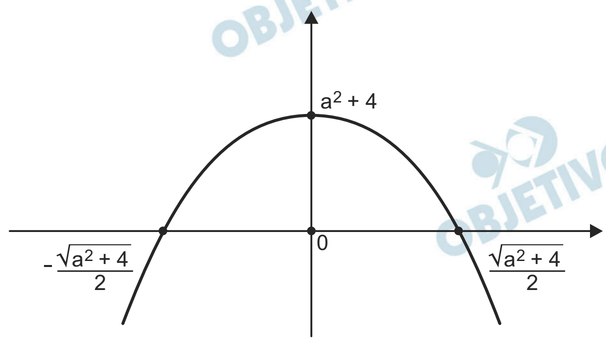
$= 4x^4 + a^2x^2 + 4 + 4ax^3 - 8x^2 - 4ax + 4x^2 + 4ax +$

$+ a^2 - 4x^4 - 4ax^3 - a^2x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z^2 + az - 1|^2 = -4x^2 + a^2 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z^2 + az - 1| = \sqrt{-4x^2 + a^2 + 4}$

Como o gráfico da função $f(x) = -4x^2 + a^2 + 4$ é do tipo



O maior valor da função f é $a^2 + 4$ e, portanto, o maior valor de $|z^2 + az - 1|$ é $\sqrt{a^2 + 4}$.

Resposta: $\sqrt{a^2 + 4}$

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm –1 como uma de suas raízes.

Resolução

a) **O número de elementos de S é dado pelas permutações (com repetição) dos elementos 2, 2, 2, 1 e 1, resultando igual a** $P_5^{(3,\,2)} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

b) **Sendo** $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$**, devemos ter** $P(-1) = 0 \Leftrightarrow a - b + c - d + e = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a + c + e = b + d$

Nas condições enunciadas, tem-se:

$$\begin{cases} b = d = 2 \\ a = 1 \\ c = 2 \\ e = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = d = 2 \\ a = 2 \\ c = 1 \\ e = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = d = 2 \\ a = 1 \\ c = 1 \\ e = 2 \end{cases}$$

Respostas: a) 10

b) Os polinômios são:

$P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$P_2(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$P_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$

Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal + ou o sinal –, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de 1/3 a probabilidade de A escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal + sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Resolução

São dadas as seguintes probabilidades:

1) **De A assinalar + :** $\dfrac{1}{3}$

2) **De A assinalar – :** $\dfrac{2}{3}$

3) **De B manter o sinal:** $\dfrac{1}{3}$

4) **De B trocar o sinal:** $\dfrac{2}{3}$

5) **De C manter o sinal:** $\dfrac{1}{3}$

6) **De C trocar o sinal:** $\dfrac{2}{3}$

Todas as possibilidades do experimento estão descritas na tabela a seguir.

	A	B	C	probabilidade
1	+	+	+	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
2	+	+	–	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$
3	+	–	+	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$
4	+	–	–	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$
5	–	+	+	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$
6	–	+	–	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
7	–	–	+	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$
8	–	–	–	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

A probabilidade de A haver escrito o sinal +, sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento, é

$$p = \frac{\frac{1}{27} + \frac{4}{27}}{\frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27}} = \frac{5}{13}$$

Resposta: $\frac{5}{13}$

Seja n um inteiro positivo tal que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}.$$

a) Determine n.

b) Determine $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$.

Resolução

a) Lembrando que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$**, então,** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}}$**, assim, se** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$**, deve-se ter:**

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} = 2-2\cos\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow n = 6$$

b) Para n = 6, tem-se $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$**, assim:**

I) $\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

II) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}} =$

$$\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

Respostas: a) 6

b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + \ \ y = \beta \end{cases} \qquad T\begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

Resolução

1) **Para que o sistema** $S\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases}$

seja compatível indeterminado, as características das matrizes $MI = \begin{bmatrix} 2 & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$ **e** $MC = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ c & \beta \end{bmatrix}$ **deverão ser iguais a 1.**

2) **De modo análogo para que o sistema**

$T\begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$ **seja compatível indeterminado,**

as matrizes $MI' = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{bmatrix}$ **e** $MC' = \begin{bmatrix} c & \alpha \\ 4 & \beta \end{bmatrix}$

também deverão ter características iguais a 1.

3) **Assim:**

$$\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow bc = 2 \text{ (I)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c\alpha = 2\beta \text{ (II)}$$

$$\begin{vmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow cd = 12 \text{ (III)}$$

$$\begin{vmatrix} c & \alpha \\ 4 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c\beta = 4\alpha \text{ (IV)}$$

Das equações (II) e (IV), temos:

$c\alpha \,.\, c\beta = 2\beta \,.\, 4\alpha \Leftrightarrow c^2 = 8 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$

Substituindo nas equações (I) e (III), temos:

$$b \,.\, (\pm\ 2\sqrt{2}) = 2 \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\pm 2\sqrt{2}) \,.\, d = 12 \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

Na equação (II), conclui-se:

$$(\pm 2\sqrt{2}) \,.\, \alpha = 2\beta \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,\beta$$

Respostas: As trincas (b; c; d) possíveis são

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}\right) \text{ ou}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -2\sqrt{2};\ -3\sqrt{2}\right)$$

As relações entre α e β são $\alpha = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\beta$

29

Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Resolução

I) $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-x - 2y + 2)\,.\,(-3x + y - 3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x - 2y + 2 = 0$ ou $-3x + y - 3 = 0$

II) **Se r for a reta de equação $-x - 2y + 2 = 0$, o coeficiente angular de r será $m_r = -\dfrac{1}{2}$**

III) **Se s for a reta de equação $-3x + y - 3 = 0$, o coeficiente angular de s será $m_s = 3$.**

IV) **O ângulo agudo θ formado pelas retas r e s é tal que:**

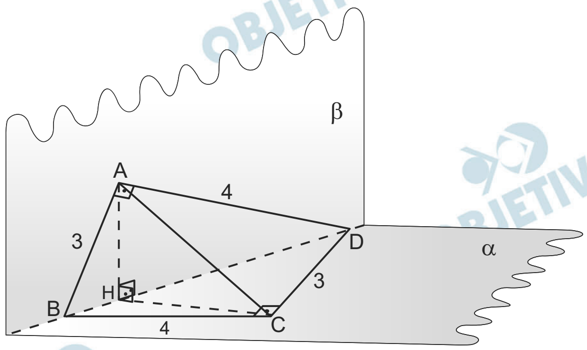
$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r\,.\,m_s} = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right).\,3} =$$

$$= \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = 7$$

Resposta: 7

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Resolução



Todas as dimensões lineares a seguir estão em centímetros.

Sejam α e β dois planos perpendiculares e ABCD um retângulo de papel com AB = 3 cm e BC = 4 cm. Dobrando-se o retângulo de papel de acordo com o enunciado, obteremos a figura acima.

I) No triângulo retângulo ABD, temos:

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 \Rightarrow (BD)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BD = 5,$$

$$(BD) . (AH) = (AB) . (AD) \Rightarrow 5 . (AH) = 3 . 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{12}{5} \text{ e } (AB)^2 = (BD) . (BH) \Rightarrow 3^2 = 5 . BH \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BH = \frac{9}{5}$$

II) No triângulo retângulo BCD, temos:

$$\cos C\hat{B}D = \frac{4}{5}$$

III) Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo BHC, temos:

$$(CH)^2 = (BH)^2 + (BC)^2 - 2 . (BH) . (BC) . \cos C\hat{B}D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CH)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 . \frac{9}{5} . 4 . \frac{4}{5} = \frac{193}{25}$$

III) **Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC, temos:**

$$(AC)^2 = (AH)^2 + (CH)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{193}{25} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$$

Resposta: O tetraedro tem duas arestas que medem 3 cm, duas arestas que medem 4 cm, uma aresta que mede 5 cm e uma aresta que mede $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$ cm.