

NOTAÇÕES

\mathbb{R} : conjunto dos números reais

\mathbb{C} : conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\text{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\text{Im}(z)$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$

$\det A$: determinante da matriz A

$\text{tr } A$: traço da matriz quadrada A , que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de A .

Potência de matriz : $A^1 = A, A^2 = A \cdot A, \dots, A^k = A^{k-1} \cdot A$, sendo A matriz quadrada e k inteiro positivo.

$d(P, r)$: distância do ponto P à reta r

\overline{AB} : segmento de extremidades nos pontos A e B

$[a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[$ = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[$ = $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$X \setminus Y$ = $\{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

$\sum_{k=0}^n a_k$ = $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}^n} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

A () nenhuma.

B () apenas II.

C () apenas I e II.

D () apenas I e III.

E () I, II e III.

Questão 2. Sejam A , B e C os subconjuntos de \mathbb{C} definidos por $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 7/2\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \setminus B) \cap C$ é o conjunto

- A () $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$. B () $\{-3 - i, -3 + i\}$. C () $\{-3 + i\}$.
D () $\{-3 - i\}$. E () $\{-1 + 3i\}$.

Questão 3. Se $z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de $2 \arcsen(\operatorname{Re}(z)) + 5 \operatorname{arctg}(2 \operatorname{Im}(z))$ é igual a

- A () $-\frac{2\pi}{3}$. B () $-\frac{\pi}{3}$. C () $\frac{2\pi}{3}$. D () $\frac{4\pi}{3}$. E () $\frac{5\pi}{3}$.

Questão 4. Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r : 3x + 4y - 4 = 0$ e $s : 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

- A () $\frac{5\pi}{7}$. B () $\frac{4\pi}{5}$. C () $\frac{3\pi}{2}$. D () $\frac{8\pi}{3}$. E () $\frac{9\pi}{4}$.

Questão 5. Seja (a_1, a_2, a_3, \dots) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

- I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} , que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
II. a_7 é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas II. B () apenas I e II. C () apenas I e III.
D () apenas II e III. E () I, II e III.

Questão 6. Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-1/2} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

- I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.
II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.
III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas II. B () apenas I e II. C () apenas I e III.
D () apenas II e III. E () I, II e III.

Questão 7. Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p , então o valor de $b - a$ é igual a

- A () -36 . B () -12 . C () 6 . D () 12 . E () 24 .

Questão 8. Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, 15$, e $a_{15} \neq 0$.

Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q , dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

- A () $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$. B () $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$. C () $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.
- D () $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$. E () $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Questão 9. Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo \sqrt{a} , $2\sqrt{a}$ e a . Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a

- A () $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{4}$. B () $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$. C () $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. D () $\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$. E () $\operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

Questão 10. Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2 \sin x - \cos x = 1$ são

- A () $\arccos \left(\frac{3}{5} \right)$ e π . B () $\arcsen \left(\frac{3}{5} \right)$ e π . C () $\arcsen \left(-\frac{4}{5} \right)$ e π .
- D () $\arccos \left(-\frac{4}{5} \right)$ e π . E () $\arccos \left(\frac{4}{5} \right)$ e π .

Questão 11. Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5} \cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7} \cos^4 \frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}.$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

- A () -1 . B () $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C () $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D () $-\frac{1}{2}$. E () 0 .

Questão 12. Seja $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$, $1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:

- I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i .
- II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.
- III. $\operatorname{tr} A$ é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas I e II. C () apenas II e III.
- D () apenas I e III. E () I, II e III.

Questão 13. Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, $i, j = 1, 2$. Sabendo-se que

$$\det \left(\sum_{k=1}^n M^k - n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 252,$$

então o valor de n é igual a

- A () 4. B () 5. C () 6. D () 7. E () 8.

Questão 14. Considere os pontos $A = (0, -1)$, $B = (0, 5)$ e a reta $r : 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

- I. $d(A, r) = d(B, r)$.
II. B é simétrico de A em relação à reta r .
III. \overline{AB} é base de um triângulo equilátero ABC , de vértice $C = (-3\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (3\sqrt{3}, 2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

- A () I. B () II. C () I e II. D () I e III. E () II e III.

Questão 15. Dados o ponto $A = \left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r : 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC , cuja base \overline{BC} está contida em r e a medida dos lados \overline{AB} e \overline{AC} é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

- A () $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$. B () $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$. C () $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$. D () $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$. E () $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

Questão 16. Considere as afirmações a seguir:

- I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento \overline{AB} , com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano \mathbb{R}^2 .
III. Os pontos $(2, 3)$, $(4, -1)$ e $(3, 1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

- A () apenas I. B () apenas II. C () apenas III.
D () I e II. E () I e III.

Questão 17. Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior \overline{AB} medindo 15, o lado \overline{AD} medindo 9 e o ângulo \widehat{ADB} reto. A distância entre o lado \overline{AB} e o ponto E em que as diagonais se cortam é

- A () $\frac{21}{8}$. B () $\frac{27}{8}$. C () $\frac{35}{8}$. D () $\frac{37}{8}$. E () $\frac{45}{8}$.

Questão 18. Num triângulo PQR , considere os pontos M e N pertencentes aos lados \overline{PQ} e \overline{PR} , respectivamente, tais que o segmento \overline{MN} seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR . Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de \overline{QR} é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

- A () 5. B () 6. C () 8. D () 10. E () 15.

Questão 19. Considere uma circunferência C , no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r : x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O = (0, 0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

- A () $(2, 2\sqrt{2} - 2)$ e $2\sqrt{2} - 2$. B () $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.
 C () $(2, \sqrt{2} - 1)$ e $\sqrt{2} - 1$. D () $(2, 2 - \sqrt{2})$ e $2 - \sqrt{2}$.
 E () $(2, 4\sqrt{2} - 4)$ e $4\sqrt{2} - 4$.

Questão 20. Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

- A () $\sqrt[3]{2} - h$. B () $\sqrt[3]{2} - 1$. C () $(\sqrt[3]{2} - 1)h$. D () h . E () $\frac{h}{2}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as funções $f_1, f_2, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

- a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.
- b) O menor valor assumido pela função f .
- c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Questão 22. Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

- a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.
- b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p .

Questão 23. Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

- (i) B, C, D, E são dois a dois distintos;
- (ii) os números $1, B, C$, e os números $1, C, E$, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
- (iii) os números B, C, D, E , estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E .

Questão 24. Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \{|z^2 + az - 1| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a .

Questão 25. Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S .

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Questão 26. Três pessoas, aqui designadas por A , B e C , realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal $+$ ou o sinal $-$, passando em seguida a B , que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C . Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de $1/3$ a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e de $2/3$ as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal $+$ sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Questão 27. Seja n um inteiro positivo tal que $\sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n .

b) Determine $\sin \frac{\pi}{24}$.

Questão 28. Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d , bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S \begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases} \quad T \begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

Questão 29. Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s , formando um ângulo agudo θ . Determine a tangente de θ .

Questão 30. Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.