NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re(z): parte real do número $z \in \mathbb{C}$
Im(z): parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
det M : determinante da matriz M
M^T : transposta da matriz M
M^{-1} : inversa da matriz M
I_n : matriz identidade $n \times n$
MN : produto das matrizes M e N
d(P, r): distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$X \backslash Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

1

Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x + 1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.
e) apenas III.

Resolução

I) Se $\{x_1; x_2\} \subset]1; +\infty[$, com $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x_1} < 1 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(1-\frac{1}{x_1}\right) < \log_{10}\left(1-\frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{x_1-1}{x_1}\right) < \log_{10}\left(\frac{x_2-1}{x_2}\right) \text{ e,}$$

portanto, f é estritamente crescente, e a afirmação (I) é verdadeira.

II) $2^{x+2} = 3^{x-1} \Leftrightarrow 2^x \cdot 4 = 3^x \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{12}\right)$$

A equação proposta tem uma única solução e a afirmação (II) é verdadeira.

III) $(x+1)^x > x, \forall x \in \mathbb{R}_+$ **e afirmação (IV) é falsa.**

Resposta: B

2

Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285. b) 286. c) 287.
d) 288. e) 289.

Resolução

***x* é um número natural de 2015 dígitos, então:**

$$10^{2014} < x < 10^{2015} \Leftrightarrow 2014 < \log x < 2015 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2014}{7} < \frac{1}{7} . \log x < \frac{2015}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 287{,}71 < \log \sqrt[7]{x} < 287{,}85 \Leftrightarrow 10^{287{,}71} < \sqrt[7]{x} < 10^{287{,}85}$$

Assim, a parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ tem 288 dígitos.

Resposta: D

Escolhendo-se, aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo [1, 20], a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a

a) $\dfrac{2}{285}$. b) $\dfrac{2}{217}$. c) $\dfrac{1}{190}$.

d) $\dfrac{4}{225}$. e) $\dfrac{1}{380}$.

Resolução

São possíveis $C_{20,3} = \dfrac{20 \,.\, 19 \,.\, 18}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 1140$ escolhas dife-tes de três números inteiros no intervalo [1; 20].

Considerando apenas *razões inteiras* das progressões geométricas, em alguma ordem, temos oito casos a considerar, que são os ternos (1; 2; 4), (1; 3; 9), (1; 4; 16); (2; 4; 8), (2; 6; 18), (3; 6; 12), (4; 8; 16) e (5; 10; 20).

Assim, a probabilidade pedida *seria*

$p = \dfrac{8}{1140} = \dfrac{2}{285}$ e a resposta seria A.

No entanto, existem mais três ternos de *números inteiros* que estão em progressão geométrica e com *razão não inteira*, são eles: (4; 6; 9), (8; 12; 18) e (9; 12; 16).

Neste caso, a resposta correta é $p = \dfrac{11}{1140}$ e nenhuma resposta é correta.

Resposta: **SEM ALTERNATIVA CORRETA.**

Se tg x = $\sqrt{7}$ e x $\in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, então sen 3x é igual a

a) $-\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.
b) $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.
c) $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.
d) $-\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.
e) $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

Resolução

Sendo tg x = $\sqrt{7}$ e x $\in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, temos:

I) $\begin{cases} \sec^2 x = 1 + tg^2 x \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{\sec^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sec^2 x = 8 \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

II) $sen^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow sen^2\, x + \dfrac{1}{8} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen^2\, x = \dfrac{7}{8} \Rightarrow sen\, x = -\dfrac{\sqrt{14}}{4}$, **pois**

$x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

III) Lembrando que sen (3x) = 3 sen x – 4 sen^3 x, temos:

$sen\,(3x) = 3 \,.\, \left(-\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right) - 4\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\,(3x) = -\dfrac{3\sqrt{14}}{4} + 4 \,.\, \dfrac{14\sqrt{14}}{64} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\,(3x) = \dfrac{\sqrt{14}}{8}$

Resposta: B

Seja $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.
e) apenas III.

Resolução

$\mathbf{a_1 = 1000}$ **e** $\mathbf{a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})}$**, para** $\mathbf{n \geq 2}$

$\mathbf{a_2 = \log_{10}(1 + a_1) = \log_{10}(1 + 1000) = \log_{10}1001 = 3, \ldots}$

$\mathbf{a_3 = \log_{10}(1 + a_2) = \log_{10}(1 + 3,\ldots) = \log_{10}(4,\ldots) = 0, \ldots}$

$\mathbf{a_4 = \log_{10}(1 + a_3) = \log_{10}(1 + 0,\ldots) = 0,\ldots}$

$\mathbf{a_n = \log_{10}(1 + 0,\ldots) = 0,\ldots}$

Resposta: D

Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.

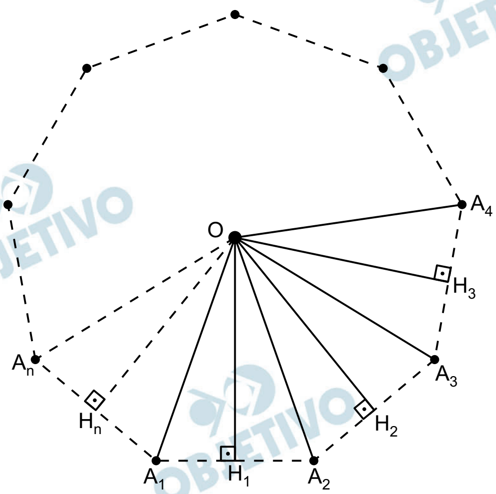
II. P_n é circunscritível a uma circunferência.

III. Se ℓ_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\dfrac{a_n}{\ell_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) I, II e III.

Resolução



I) ***Verdadeira*.**

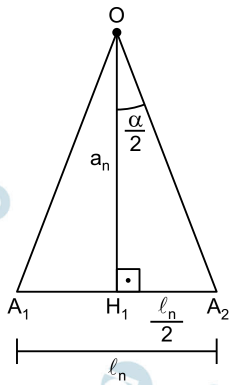
Sendo O o centro do polígono regular de n lados, os triângulos A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4,..., A_nOA_1 são congruentes e $\overline{OA_1}$ é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

II) ***Verdadeira*.**

Da congruência dos triângulos, temos:

$OH_1 = OH_2 = OH_3 = ... = OH_n$ e $\overline{OH_1}$ é raio da circunferência inscrita no polígono.

III) *Falsa.*



No triângulo OH_1A_2, temos:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\ell_n}{2}}{a_n} \Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell_n}{a_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n}{\ell_n} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Assim, teremos $\frac{a_n}{\ell_n} > 1$ **quando**

$$\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

Por exemplo, no polígono regular com 12 lados, temos:

$$\frac{\alpha}{2} = 15° \text{ e } \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{tg}\ 15° = \mathrm{tg}\ (60° - 45°) =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$$

Logo, $\frac{a_{12}}{\ell_{12}} > 1$

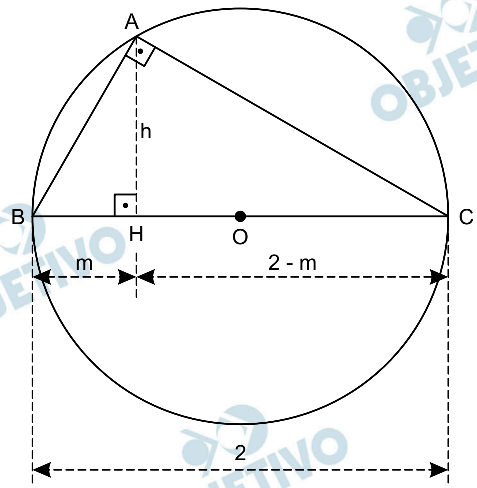
Resposta: D

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ cm^2. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. e) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

Resolução



I) Como o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 1 cm e o maior lado mede 2 cm, podemos concluir que o triângulo é retângulo.
Assim, sendo S sua área, em centímetros quadrados, tem-se:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2\,.\,h}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

II) No triângulo retângulo ABC, temos:

$$h^2 = m\,.\,(2 - m) \;\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2m - m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pois se } \overline{AB} \text{ é}$$

o menor lado, então $m < 1$.

Assim, a medida AB do menor lado é dada por:

$$(AB)^2 = (BC)\,.\,(BH) \Rightarrow (AB)^2 = 2\,.\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Resposta: B

Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a = 6$ e $b \neq 4$.
b) $a \neq 6$ e $b \neq 4$.
c) $a \neq 6$ e $b = 4$.
d) $a = 6$ e $b = 4$.
e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

Resolução

$$\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ y + 3z = 1 \\ -2y + (a - 12)z = b - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ y + 3z = 1 \\ (a - 6)z = b - 4 \end{cases}$$

Se o sistema é impossível, então:

$$\begin{cases} a - 6 = 0 \\ b - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b \neq 4 \end{cases}$$

Resposta: A

Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a

a) $-\dfrac{3}{5}$. b) $-\dfrac{3}{7}$. c) $-\dfrac{2}{5}$.

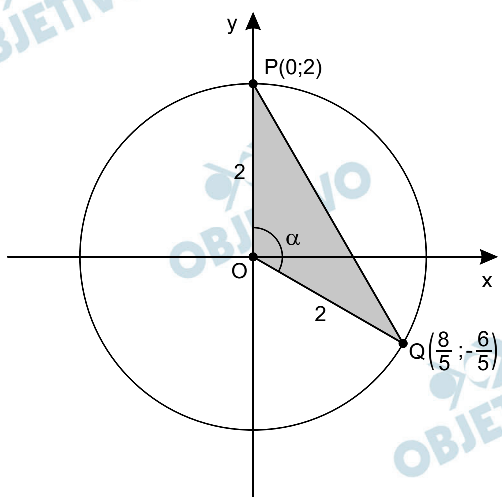
d) $-\dfrac{4}{5}$. e) $-\dfrac{1}{7}$.

Resolução

I) Os pontos P e Q são as soluções do sistema a seguir:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

II) Sendo P(0; 2) e Q $\left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$ pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de centro O(0; 0) e raio r = 2, resulta a seguinte figura:



III) $PQ = \sqrt{\left(\dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(2 + \dfrac{6}{5}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{320}{25}} = \sqrt{\frac{64}{5}}$$

IV) $(PQ)^2 = (OP)^2 + (OQ)^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos(P\hat{O}Q) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{64}{5} = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos(P\hat{O}Q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \cos(P\hat{O}Q) = -\frac{24}{5} \Leftrightarrow \cos(P\hat{O}Q) = -\frac{3}{5}$$

Resposta: A

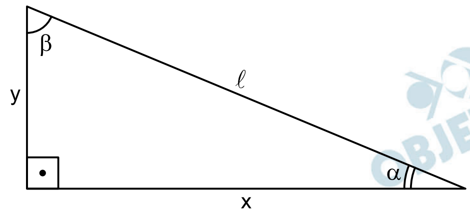
10

Um triângulo retângulo tem perímetro igual a $\ell\sqrt{5}$, em que ℓ é o comprimento da hipotenusa. Se α e β são seus ângulos agudos, com $\alpha < \beta$, então sen $(\beta - \alpha)$ é igual a

a) $5 - 2\sqrt{5}$.
b) $-6 + 3\sqrt{5}$.
c) $\sqrt{16\sqrt{5} - 35}$.
d) $\sqrt{20\sqrt{5} - 44}$.
e) $\sqrt{18\sqrt{5} - 40}$.

Resolução

I) Sendo x e y os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo, temos:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 \\ x + y + \ell = \ell\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 \\ x + y = \ell(\sqrt{5} - 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 \\ x^2 + y^2 + 2xy = \ell^2.(6 - 2\sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 \\ \ell^2 + 2xy = \ell^2.(6 - 2\sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \,.\, x\, y = \ell^2.(5 - 2\sqrt{5}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \,.\, \frac{x}{\ell} \,.\, \frac{y}{\ell} = 5 - 2\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \,.\, \text{sen}\ \beta \,.\, \cos\beta = 5 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\ (2\beta) = 5 - 2\sqrt{5}$$

II) $\text{sen}^2(2\beta) + \cos^2(2\beta) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2(2\beta) = 1 - (5 - 2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2\beta) = 20\sqrt{5} - 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\beta) = -\sqrt{20\sqrt{5} - 44}, \text{ pois } \alpha < \beta$$

III) $\text{sen}(\beta - \alpha) = \text{sen}[\beta - (90° - \beta)] =$

$$= \text{sen}(2\beta - 90°) = -\cos(2\beta) = -(-\sqrt{20\sqrt{5} - 44}) =$$

$$= \sqrt{20\sqrt{5} - 44}$$

Resposta: D

Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Resolução

I) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det \mathbf{M} = 2 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

II) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

III) $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

IV) $\mathbf{M}.\mathbf{N}^T - \mathbf{M}^{-1}.\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Resposta: C

Considere as afirmações a seguir:

I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.

II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2\,|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.

III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.
d) apenas II e III. e) I, II e III.

Resolução

I) Verdadeira

$$\begin{cases} z - iw = 1 - 2i \\ w - z = 2 + 3i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w - iw = 3 + i \Leftrightarrow (1 - i)w = 3 + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{3 + i}{1 - i} = \frac{3 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = 1 + 2i$$

Como $w - z = 2 + 3i$ e $w = 1 + 2i$, tem-se:
$1 + 2i - z = 2 + 3i \Leftrightarrow z = -1 - i$

Assim, $z^2 + w^2 = (-1 - i)^2 + (1 + 2i)^2 =$

$= 2i + 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 6i$

II) ***Verdadeira***

Sendo $z = a + bi$, tem-se:

$2 \,.\, |z|^2 + z^2 = 4 + 2i \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \,.\, (a^2 + b^2) + (a + bi)^2 = 4 + 2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + a^2 + 2abi - b^2 = 4 + 2i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4 \\ 2ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4 \\ b = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^4 - 4a^2 + 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim:

$z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 - i, z_3 = \sqrt{\dfrac{1}{3}} + \sqrt{3}i,$

$z_4 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}} - \sqrt{3}i$ e $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

III) ***Falsa***

Se z = 1 – i, então:

$z^{59} = (1 - i)^{58} \cdot (1 - i) = [(1 - i)^2]^{29} \cdot (1 - i) =$

$= [-2i]^{29} \cdot (1 - i) = -2^{29} \cdot i^{29} \cdot (1 - i) =$

$= -2^{29} \cdot i \cdot (1 - i) = 2^{29} \cdot (-1 - i)$

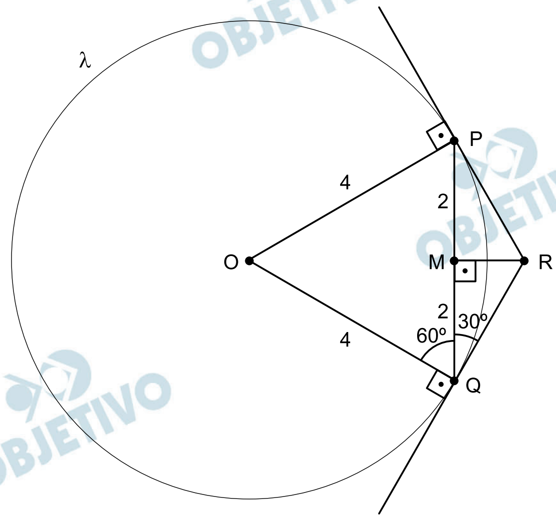
Resposta: B

Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. e) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Resolução



I) Como $\overline{PQ}$ tem mesma medida que o raio, podemos concluir que o triângulo PQO é equilátero.

Assim, $O\hat{Q}P = 60°$ e $P\hat{Q}R = 30°$.

II) Sendo M ponto médio de $\overline{PQ}$, temos MQ = 2.

III) No triângulo retângulo QMR, temos:

$$\cos 30° = \frac{MQ}{QR} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{QR} \Leftrightarrow QR = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Assim, a área S, em centímetros quadrados, do triângulo PQR, é dada por:

$$S = \frac{(PQ)\,.\,(QR)\,.\,\text{sen } 30°}{2} = \frac{4\,.\,\frac{4\sqrt{3}}{3}\,.\,\frac{1}{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: $\boxed{E}$

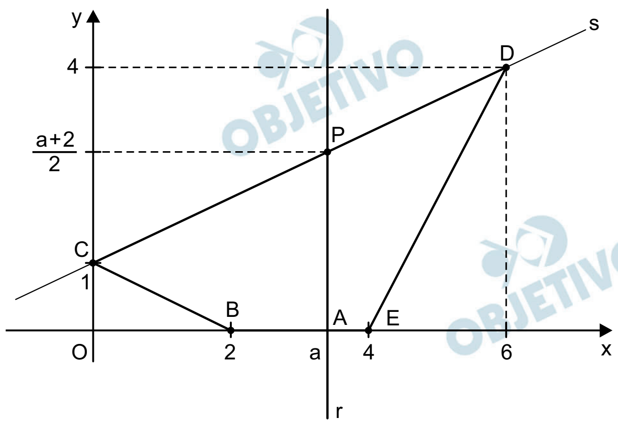
14

Se a reta de equação x = a divide o quadrilátero cujos vértices são (0, 1), (2, 0), (4, 0) e (6, 4) em duas regiões de mesma área, então o valor de *a* é igual a

a) $2\sqrt{5} - 1$. b) $2\sqrt{6} - 1$. c) $3\sqrt{5} - 4$.

d) $2\sqrt{7} - 2$. e) $3\sqrt{7} - 5$.

Resolução



I) A área S do quadrilátero BCDE é a soma das áreas dos triângulos BCE e CDE. Dessa forma, temos:

$$S = \frac{\left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} + \frac{\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **S = 10 unidades de área**

II) Equação da reta s, que contém os pontos C (0; 1) e D (6; 4):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$$

III) Ponto P, interseção entre as retas

(r) x = a e (s) x – 2y + 2 = 0:

$$\begin{cases} x = a \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{a+2}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(a\,;\,\dfrac{a+2}{2}\right)$$

IV) **A área A, do quadrilátero ABCP, é igual à diferença entre a área do trapézio AOCP e a área do triângulo OCB, e deve resultar 5, metade da área do quadrilátero BCDE.**

Dessa forma, temos:

$$A = \frac{\left(\frac{a+2}{2} + 1\right) a}{2} - \frac{2 \,.\, 1}{2} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+4)\,a}{4} = 6 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2\sqrt{7} - 2, \text{ pois } a > 0$$

Resposta: D

Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, em que os expoentes 8, m, n formam, nesta ordem, uma progressão geométrica cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p.

II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p.

III. p tem quatro raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é(são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.

d) apenas II e III. e) I, II e III

Resolução

Se (8; m; n) é uma progressão geométrica cuja soma dos termos é 14, então:

$$\begin{cases} 8 + m + n = 14 \\ m^2 = 8 \,.\, n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 - m \\ m^2 = 8 \,.\, n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = 8 \,.\, (6 - m) \Leftrightarrow m^2 + 8m - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -12 \text{ ou } m = 4$$

Para $m = -12$, temos $n = 18$, que não convém, pois os expoentes do polinômio são naturais.

Para $m = 4$, temos $n = 2$ e $p(x) = x^8 + x^4 - 2x^2$

I) $x = 0$ é raiz dupla de p(x), pois $p(x) = x^2 \,.\, (x^6 + x^2 - 2)$

II) A equação $x^6 + x^2 - 2 = 0$ admite $x = 1$ e $x = -1$ como raízes simples, pois, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	0	0	0	1	0	–2	1
1	1	1	1	2	2	0	

e

1	1	1	1	2	2	–1
1	0	1	0	2	0	

III) As demais raízes de p(x) são raízes da equação

$$1\,x^4 + 0 \,.\, x^3 + 1 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\, i}\,,$$ **que são números complexos com parte imaginária não nula.**

Desta forma:

I é verdadeira, II é falsa, pois x = 1 é raiz simples e III é verdadeira.

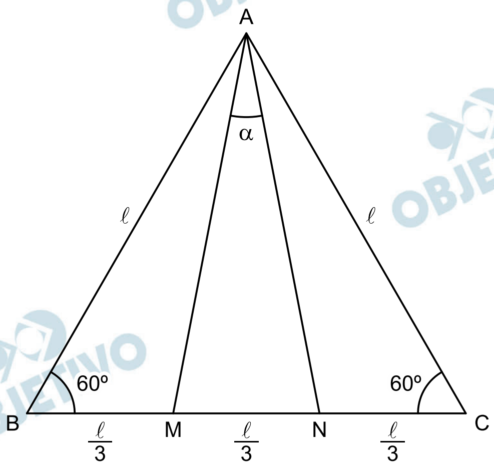
Resposta: C

Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que BM = MN = = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é

a) $\dfrac{13}{14}$. b) $\dfrac{14}{15}$. c) $\dfrac{15}{16}$.

d) $\dfrac{16}{17}$. e) $\dfrac{17}{18}$.

Resolução



I) Sendo ℓ a medida do lado do triângulo equilátero ABC, temos: BM = MN = NC = $\dfrac{\ell}{3}$

II) Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo ABM, temos:

$$(AM)^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 - 2 \,.\, \ell \,.\, \frac{\ell}{3} \,.\, \cos 60° =$$

$$= \ell^2 + \frac{\ell^2}{9} - 2\,\frac{\ell^2}{3} \,.\, \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$$

III) AM = AN = $\dfrac{\ell\sqrt{7}}{3}$, pois os triângulos ABM e ACN são congruentes.

IV) Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo AMN, temos:

$$\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 2 \,.\, \frac{\ell\sqrt{7}}{3} \,.\, \frac{\ell\sqrt{7}}{3} \,.\, \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{14\ell^2}{9} \,.\, \cos\alpha = \frac{7\ell^2}{9} + \frac{7\ell^2}{9} - \frac{\ell^2}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{14\ell^2}{9} \,.\, \cos\alpha = \frac{13\ell^2}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{13}{14}$$

Resposta: A

Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\dfrac{\pi R^5}{3r(R-r)}$.

b) $\dfrac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$.

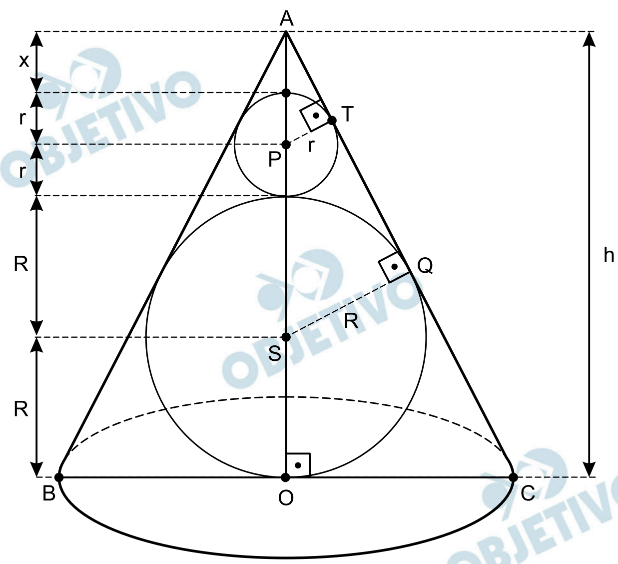
c) $\dfrac{\pi R^5}{r(R-r)}$.

d) $\dfrac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$.

e) $\dfrac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$.

Resolução

Vamos admitir que a esfera de menor raio esteja entre a de maior raio e o vértice do cone.



I) Da semelhança dos triângulos retângulos ATP e AQS da figura, temos:

$$\frac{AP}{PT} = \frac{AS}{SQ} \Leftrightarrow \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r+R}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xR + rR = xr + 2r^2 + Rr \Leftrightarrow x = \frac{2r^2}{R-r}$$

II) A altura h do cone é tal que

$$h = AP + PS + SO = x + 2r + 2R = \frac{2r^2}{R-r} + 2(R+r) =$$

$$= \frac{2r^2 + 2(R^2 - r^2)}{R-r} \Leftrightarrow h = \frac{2R^2}{R-r}$$

III) No triângulo ATP, temos:

$$AT^2 + PT^2 = AP^2 \Rightarrow AT^2 + r^2 = (x+r)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AT^2 = x^2 + 2xr \Leftrightarrow AT^2 = \left(\frac{2r^2}{R-r}\right)^2 + 2r\left(\frac{2r^2}{R-r}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AT^2 = \frac{4r^4}{(R-r)^2} + \frac{4r^3}{(R-r)} = \frac{4r^4 + 4r^3(R-r)}{(R-r)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AT^2 = \frac{4r^3R}{(R-r)^2} \Leftrightarrow \quad AT = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}$$

IV) Da semelhança dos triângulos ATP e AOC, temos:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{PT}{OC} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}}{\dfrac{2R^2}{R-r}} = \frac{r}{OC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow OC \,.\, \sqrt{R\,.\,r} = R^2 \Leftrightarrow \quad OC = \frac{R^2}{\sqrt{Rr}}$$

V) O volume V do cone K é

$$V = \frac{1}{3} \,.\, \pi\, OC^2 \,.\, h =$$

$$= \frac{1}{3}\, \pi \,.\, \left(\frac{R^2}{\sqrt{Rr}}\right)^2 \cdot \frac{2\,R^2}{R-r} = \frac{2\,\pi\,R^5}{3\,r\,(R-r)}$$

Resposta: B

Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i).$$

Podemos afirmar que

a) nenhuma das raízes de p é real.

b) não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.

c) a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.

d) o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.

e) o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

Resolução

I) i é raiz do polinômio p(z), pois

$$p(i) = i^4 + (2 + i) \,.\, i^3 + (2 + i) \,.\, i^2 + (2 + i) \,.\, i + (1 + i) =$$
$$= 1 + (2 + i) \,.\, (i^3 + i^2 + i + 1) - 1 = (2 + i) \,.\, 0 = 0$$

II) –i é raiz do polinômio p(z), pois

$$p(-i) = (-i)^4 + (2 + i) \,.\, (-i)^3 + (2 + i) \,.\, (-i)^2 + (2 + i) \,.$$
$$.\, (-i) + (1 + i) = 1 + (2 + i) \,.\, (-i^3 + i^2 - i + 1) - 1 =$$
$$= (2 + i) \,.\, 0 = 0$$

III) Desta forma, p(z) é divisível por

$(z - i)(z - (-i)) = z^2 + 1$ **e**

$p(z) = [z^2 + (2 + i) z + (1 + i)] \,.\, (z^2 + 1)$, **pois**

$$\begin{array}{l|l} p(z) & z^2 + 1 \\ \hline 0 & z^2 + (2 + i) z + (1 + i) \end{array}$$

IV) As raízes de $z^2 + (2 + i) z + (1 + i) = 0$ **são** $z = -1 - i$ **e** $z = -1$

V) O conjunto solução de p(z) = 0 é

$S = \{i; -i; -1 - i; -1\}$

Como $|i| = |-i| = 1$ **e** $|-1 - i| = \sqrt{2}$,

o módulo de uma das raízes de p é $\sqrt{2}$

Resposta: $\boxed{E}$

19

Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

Resolução

A face superior do cubo pode ser pintada de 6 formas diferentes. A face inferior pode ser pintada de 5 formas diferentes.

As faces laterais podem ser pintadas de $P_4^* = 3! = 6$ (permutação circular) formas diferentes.

No entanto, como qualquer uma das faces pode ser a superior, o número de maneiras de pintar o cubo é

$$\frac{6 \,.\, 5 \,.\, P_4^*}{6} = 30$$

Assim, o maior valor de N é 30.

Resposta: $\boxed{E}$

Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P, M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que

a) P é o ponto médio de $\overline{AB}$;

b) M é o ponto médio de $\overline{BC}$;

c) PN é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$.

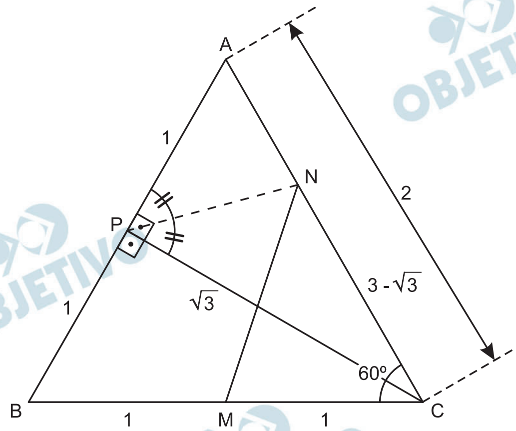
Então, o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a

a) $\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{10 - 5\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{5\sqrt{3} - 5}$

Resolução



I) No triângulo APC, retângulo em P, temos:

$AP^2 + PC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 1^2 + PC^2 = 2^2 \Rightarrow PC = \sqrt{3}$

II) Pelo teorema da bissetriz, temos:

$$\frac{AN}{AP} = \frac{CN}{PC} \Rightarrow \frac{2 - CN}{1} = \frac{CN}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,CN = CN \Leftrightarrow 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)\,CN \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow CN = 3 - \sqrt{3}$$

III) No triângulo CMN, temos

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2 \,.\, CM \,.\, CN \,.\, \cos 60° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = 1^2 + (3 - \sqrt{3})^2 - \cancel{2} \,.\, 1 \,.\, (3 - \sqrt{3}) \,.\, \frac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = 10 - 5\sqrt{3} \Rightarrow MN = \sqrt{10 - 5\sqrt{3}}$$

Resposta: D

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

Resolução

a) **Se $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$, deve-se ter:**

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 4 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4$$

Assim, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $f(x) = 2 \Rightarrow \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = -9 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{4} \notin D_f \Rightarrow V = \varnothing$

c) $f(x) > 1 \Rightarrow \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > 1$

Como $x > 4$, f(x) é estritamente crescente, assim:

$x^2 - 2x - 8 > x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ **ou** $x > \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$**, pois** $x > 4$

Respostas: a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $V = \varnothing$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \text{sen } y = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}\ \text{sen } x + \sqrt{3}\cos y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolução

I) Se x e y pertencem ao intervalo $[0; \pi]$, então $0 \le \text{sen } x \le 1$ e $0 \le \text{sen } y \le 1$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \text{sen } y = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}\ \text{sen } x + \sqrt{3}\cos y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos x = \dfrac{1}{2} + \text{sen } y \\ \sqrt{2}\ \text{sen } x = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}\cos y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}\cos x)^2 + (\sqrt{2}\ \text{sen } x)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \text{sen } y\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cos y\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{4} + \text{sen } y + \text{sen}^2 y + \frac{1}{4} + \sqrt{3}\cos y + 3\cos^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \text{sen } y + 1 - \cos^2 y + \sqrt{3}\cos y + 3\cos^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{sen } y + \sqrt{3}\cos y + 2\cos^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cos y - 2\cos^2 y\right)^2 = \text{sen}^2\, y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + 3\cos^2 y + 4\cos^4 y - \sqrt{3}\cos y - 2\cos^2 y +$$

$$+ 4\sqrt{3}\cos^3 y = 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 y + 4\sqrt{3}\cos^3 y + 2\cos^2 y - \sqrt{3}\cos y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^4 y + 16\sqrt{3}\cos^3 y + 8\cos^2 y - 4\sqrt{3}\cos y - 3 = 0$$

II) Fazendo cos y = p, resulta:

$16\,p^4 + 16\sqrt{3}\,p^3 + 8\,p^2 - 4\sqrt{3}\,p - 3 = 0$. Nesta equação, $p = \dfrac{1}{2}$ e $p = -\dfrac{1}{2}$ são raízes, pois, por Briot-Ruffini, temos:

16	$16\sqrt{3}$	8	$-4\sqrt{3}$	-3	$\frac{1}{2}$
16	$8+16\sqrt{3}$	$12+8\sqrt{3}$	6	0	

e

16	$8+16\sqrt{3}$	$12+8\sqrt{3}$	6	$-\frac{1}{2}$
16	$16\sqrt{3}$	12	0	

As outras duas raízes são raízes da equação

$16\,p^2 + 16\sqrt{3}\,p + 12 = 0$, ou seja, $p = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (dupla)

III) Para $p = \dfrac{1}{2}$, temos $\cos y = \dfrac{1}{2}$ e

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\,.\,\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,x = -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$ que não serve, pois

$0 \le \text{sen}\,x \le 1$

IV) Para $p = -\dfrac{1}{2}$, temos $\cos y = -\dfrac{1}{2}$ e

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\,.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Neste caso: $\left(x = \dfrac{\pi}{12} \text{ ou } x = \dfrac{11\pi}{12}\right)$ e $y = \dfrac{2\pi}{3}$

O par $\left(\dfrac{\pi}{12}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ é solução do sistema, como se pode ver:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12} - \text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3} = \sqrt{2}\,.\left[\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right] - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12} + \sqrt{3}\cos\dfrac{2\pi}{3} = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right] + \sqrt{3}\,.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

O par $\left(\frac{11\pi}{12}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ não é solução da primeira equação, como pode se ver:

$$\sqrt{2}\ \cos x - \text{sen } y = \sqrt{2}\ \cos\frac{11\pi}{12} - \text{sen}\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

V) Para $p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$\sqrt{2}\ \text{sen } x + \sqrt{3}\ .\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Neste caso $\left(x = \frac{\pi}{4}\ \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}\right)$ e $y = \frac{5\pi}{6}$

O par $\left(\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right)$ é solução do sistema, como se vê:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2}\,.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\,\text{sen}\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2}\,.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{3}\,.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

O par $\left(\frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right)$ não satisfaz a primeira equação, pois

$$\sqrt{2}\ \cos x - \text{sen } y = \sqrt{2}\ \cos\frac{3\pi}{4} - \text{sen}\frac{5\pi}{6} =$$

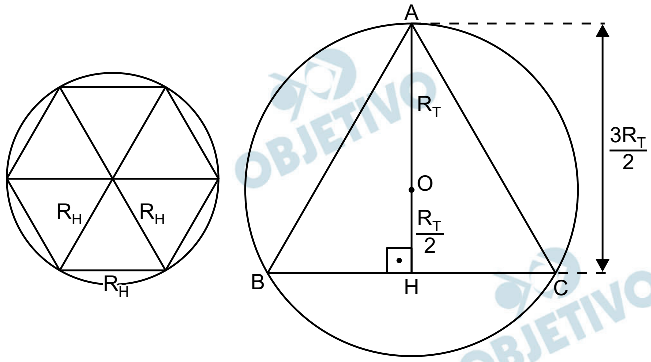
$$= \sqrt{2}\ .\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Assim, os pares que satisfazem o sistema são $\left(\frac{\pi}{12}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right)$

Respostas: $\left(\frac{\pi}{12}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right)$

Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios R_H e R_T, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\frac{R_H}{R_T}$.

Resolução



I) Sendo S_H a área do hexágono regular, temos:

$$S_H = 6 \cdot \frac{(R_H)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot (R_H)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

II) No triângulo equilátero ABC, temos:

$AH = R_T + \frac{R_T}{2} = \frac{3R_T}{2}$, pois O é baricentro do triângulo.

Assim, sendo L_T a medida do lado do triângulo ABC, temos:

$$AH = \frac{L_T \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3 \cdot R_T}{2} = \frac{L_T \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L_T = R_T \cdot \sqrt{3}$$

III) Sendo S_T a área do triângulo ABC, temos:

$$S_T = \frac{(L_T)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(R_T\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3(R_T)^2\sqrt{3}}{4}$$

IV) $$S_H = S_T \Rightarrow \frac{3 \cdot (R_H)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3(R_T)^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $\frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Seja A a matriz de ordem 3 x 2, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

Resolução

Seja B a matriz 2 x 3 dada por $B = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \end{pmatrix}$

a) $B \cdot A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + b = 1 \\ a + b = 0 \\ y + d = 0 \\ c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - x \\ a = x - 1 \\ d = -y \\ c = 1 + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & x-1 & 1-x \\ y & y+1 & -y \end{pmatrix}$$

b) $B \cdot B^T = I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & x-1 & 1-x \\ y & y+1 & -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ x-1 & 1+y \\ 1-x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x-1)^2 + (1-x)^2 = 1 \\ xy + (x-1) \cdot (1+y) + (1-x) \cdot (-y) = 0 \Leftrightarrow \\ y^2 + (1+y)^2 + (-y)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Assim, um exemplo para a matriz B é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**, quando x = 1 e y = 0**

Respostas: a) $B = \begin{pmatrix} x & x-1 & 1-x \\ y & y+1 & -y \end{pmatrix}$

b) Sim, um exemplo é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

25

Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste.

Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

Resolução

I) A probabilidade de retirar 3 bolas N e 3 bolas S é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 . P_6^{3,3} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 20$$

II) A probabilidade de retirar 3 bolas L e 3 bolas O é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 . P_6^{3,3} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 20$$

III) A probabilidade de retirar 2 bolas N, 2 bolas S, uma bola L e uma bola O é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 . P_6^{2,2} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 180$$

IV) A probabilidade de retirar 2 bolas L, 2 bolas O, uma bola N e uma bola S é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 . P_6^{2,2} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 180$$

V) A probabilidade de voltar para a posição inicial é

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 . 20 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 20 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 180 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 . 180 =$$

$$= \frac{400}{4^6} = \frac{25}{256}$$

Resposta: $\frac{25}{256}$

Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e P = (a, b) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se *distância* de P a S, d(P , S), como a menor das distâncias d(P, Q), com Q ∈ S:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) : Q \in S\}.$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \geqslant 2\}$ e

$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

a) Determine $d(P, S_1)$ quando P = (1, 4) e $d(Q, S_1)$ quando Q = (–3, 0).

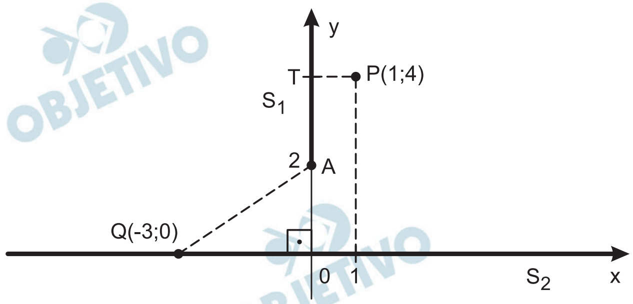
b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2.

Resolução

$S_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ é o conjunto de pontos do eixo das ordenadas, com ordenada maior ou igual a 2.

$S_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ é o conjunto de pontos do eixo das abscissas.

Na figura, os dois conjuntos aparecem em destaque.



a) $d(P; S_1) = PT = 1$, abscissa de P, e
$d(Q; S_1) = AQ = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, hipotenusa do triângulo retângulo AOQ.

b) São equidistantes de S_1 e S_2:

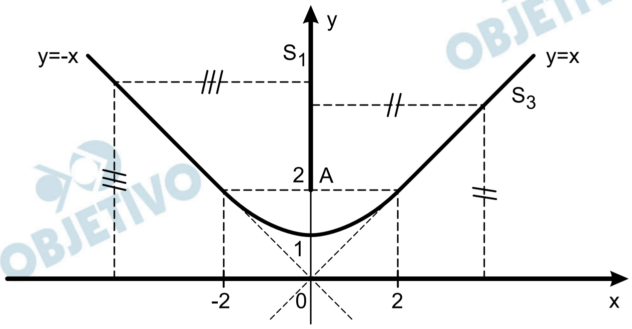
b1) Os pontos da reta y = x, com abscissa e ordenada maiores ou iguais a 2.

b2) Os pontos da reta y = –x, com abscissas menores ou iguais a – 2.

b3) O ponto da parábola de foco A(0; 2), diretriz y = 0, vértice (0; 1) e equação

$$x^2 = 4 \,.\, 1(y - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

A figura mostra este lugar geométrico



Assim, o lugar geométrico pedido é

$S_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (y = -x, \text{ se } x \le 2)$ ou

$\left(y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1, \text{ se } -2 \le x \le 2\right)$ ou $(y = x, \text{ se } x \ge 2)\}$

Respostas: a) $d(P,S_1) = 1$ e $d(Q,S_1) = \sqrt{13}$

b) vide gráfico

Sejam a, b, c números reais com $a \neq 0$.

a) Mostre que a mudança $x + \frac{1}{x} = z$ transforma a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

numa equação de segundo grau.

b) Determine todas as raízes da equação

$x^4 + 3x^2 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Resolução

a) I) Se $z = x + \frac{1}{x}$, então $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

II) Se $a \neq 0$, então zero não é raiz da equação.

III) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a(z^2 - 2) + bz + c = 0 \Leftrightarrow az^2 + bz + (c - 2a) = 0$, que é uma equação do 2º grau.

b) I) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow z^2 - 2 + 3z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = -4$ ou $z = 1$

II) $x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

III) $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

Respostas: a) demonstração

b) $\left\{-2 + \sqrt{3};\ -2 - \sqrt{3};\ \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2};\ \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

Considere as circunferências

λ_1: $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$

e

λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$.

O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;

b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;

c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

Resolução

I) A circunferência λ_1: $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$ possui centro $C_1(4; -2)$ e raio $R_1 = 2\sqrt{10}$ e a circunferência λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ possui centro $C_2(1; 4)$ e raio $R_2 = 5$.

II) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

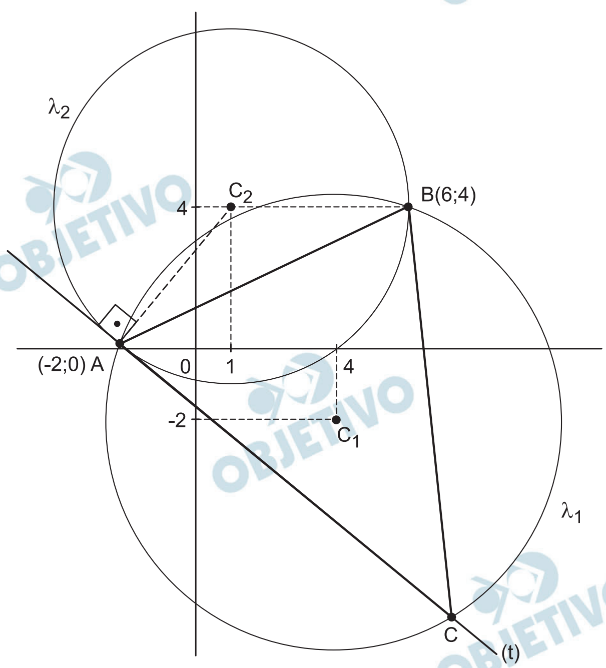
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2y - 2)^2 + y^2 - 2 \cdot (2y - 2) - 8y = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 20y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ **e** $x = -2$ **ou** $y = 4$ **e** $x = 6$

Logo, a corda comum a λ_1 e λ_2 possui extremos A(– 2; 0) e B(6; 4), pois B pertence ao primeiro quadrante.



III) **O coeficiente angular da reta que passa por $A(-2; 0)$ e $C_2(1; 4)$ é $\dfrac{4-0}{1+2} = \dfrac{4}{3}$**

IV) **A reta (t), tangente a λ_2 em $A(-2; 0)$, é perpendicular à reta que passa por A e C_2 e, portanto, tem coeficiente angular $-\dfrac{3}{4}$ e equação $y = -\dfrac{3}{4}(x+2)$**

V) **Os vértices A e C pertencem a λ_1 e à reta (t). Logo:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20 \\ y = -\dfrac{3}{4}(x+2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \left[-\frac{3}{4}.(x+2)\right]^2 - 8x + 4.\left[-\frac{3}{4}.(x+2)\right] = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 28x - 76 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{38}{5}$$

Para $x = -2$, tem-se $y = 0$ e $(-2; 0)$ são as coordenadas do ponto A.

Assim, ponto C tem $x = \dfrac{38}{5}$ que resulta

$y = -\dfrac{36}{5}$, portanto, o ponto C é $\left(\dfrac{38}{5}; -\dfrac{36}{5}\right)$

Resposta: C $\left(\dfrac{38}{5}; -\dfrac{36}{5}\right)$

29

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Resolução

I) Como

$$(1 + x + x^2)^{40} = [x\,(x + 1) + 1]^{40} =$$

$$= \binom{40}{0}[x\,(x+1)]^{40} + \binom{40}{1}[x\,(x+1)]^{39} + \dots +$$

$$+ \binom{40}{37}[x\,(x+1)]^{3} + \binom{40}{38}[x\,(x+1)]^{2} +$$

$$+ \binom{40}{39}[x\,(x+1)] + \binom{40}{40} =$$

$$= (x+1)^3\left[\binom{40}{0}x^{40}(x+1)^{37} + \binom{40}{1}x^{39}(x+1)^{36} + \dots +\right.$$

$$\left. + \binom{40}{37}x^3\right] + 780\,x^2\,(x+1)^2 + 40\,x\,(x+1) + 1,$$ **o**

resto da divisão de $(1 + x + x)^{40}$ por $(1 + x)^3$ é o mesmo resto da divisão de

$780\,x^2\,(1 + x^2) + 40\,x\,(1 + x) + 1$ por $(1 + x)^3$.

II) $780x^2\,(1 + x)^2 + 40\,x\,(1 + x) + 1 =$

$= 780\,x^4 + 1560\,x^3 + 820\,x^2 + 40\,x + 1$ **e**

$(1 + x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Dividindo um pelo outro utilizando o método da chave, resulta:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
780x^4 & +1560x^3 & +820x^2 & +40x & +1 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \cline{6-6}
-780x^4 & -2340x^3 & -2340x^2 & -780x & & 780x - 780 \\ \hline
 & -780x^3 & -1520x^2 & -740x & +1 & \\
 & 780x^3 & +2340x^2 & +2340x & +780 & \\ \cline{2-5}
 & & 820x^2 & +1600x & +781 &
\end{array}$$

III) Desta forma, o resto da divisão de $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$ é $820x^2 + 1600x + 781$, cujo termo independente é 781.

Resposta: 781