NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

det A : determinante da matriz A

d(A, B) : distância do ponto A ao ponto B

d(P, r) : distância do ponto P à reta r

$\overline{AB}$: segmento de extremidades nos pontos A e B

$\hat{A}$: medida do ângulo do vértice A

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$X \setminus Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

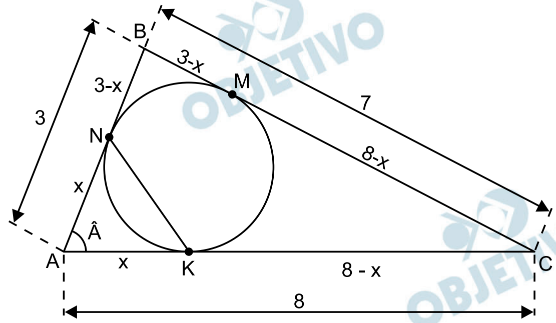
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

1

Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem AB = 3 cm, BC = 7 cm e CA = 8 cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2. b) $2\sqrt{2}$. c) 3 d) $2\sqrt{3}$. e) $\frac{7}{2}$.

Resolução



I) Sendo AN = AK = x, temos:
$7 = 3 - x + 8 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

II) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 = 9 + 64 - 48 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 60°$$

Como AN = AK = x = 2 e $\hat{A} = 60°$, o triângulo ANK é equilátero e portanto NK = 2.

Resposta: A

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$.

b) $3x^2 + 6x + 8$.

c) $13x^2 + 16x + 12$.

d) $7x^2 + 5x + 9$.

e) $9x^2 + 3x + 10$.

Resolução

Do enunciado, temos: $x^3 = x + 2$

Elevando os dois membros ao cubo, temos:

$(x^3)^3 = (x + 2)^3$

$x^9 = \underbrace{x^3} + 3 \,.\, x^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, x \,.\, 2^2 + 2^3$

$x^9 = x + 2 + 6x^2 + 12x + 8$

$x^9 = 6x^2 + 13x + 10$

Multiplicando os dois membros por x, temos:

$x \,.\, x^9 = x\,(6x^2 + 13x + 10)$

$x^{10} = 6x^3 + 13x^2 + 10x$

$x^{10} = 6(x + 2) + 13x^2 + 10x$

$x^{10} = 13x^2 + 10x + 6x + 12$

$x^{10} = 13x^2 + 16x + 12$

Resposta: C

3

Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então a + b é

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

Resolução

O termo geral do desenvolvimento de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é:

$$\binom{12}{k} \cdot (ax)^{12-k} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{k} =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{12}{k} \cdot a^{12-k} \cdot b^k \cdot x^{12-\frac{3k}{2}}$$

Esse termo será independente de x se, e somente se,

$$12 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 8$$

Para k = 8, temos:

$$(-1)^k \cdot \binom{12}{8} \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot x^0 = 7920 \Leftrightarrow 495\, a^4b^8 = 7920 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4b^8 = 16 \Leftrightarrow a\,b^2 = 2, \text{ pois } a > 0 \text{ e } b > 0$$

Como a e b são termos consecutivos de uma P.G., nessa ordem, de razão $\frac{1}{2}$, então $b = \frac{a}{2}$

Assim sendo:

$$\begin{cases} ab^2 = 2 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

Resposta: B

Considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

a) $b + ad = d + bc$.

b) $d + ba = c + db$.

c) $a + db = b + cd$.

d) $b + ac = d + ba$.

e) $c + da = b + cd$.

Resolução

1) Fazendo $f(x) = ax + b = y$, temos:

$$x = \frac{y - b}{a} \text{ e, portanto, } f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

2) Fazendo $g(x) = cx + d = t$, temos:

$$x = \frac{t - d}{c} \text{ e, portanto, } g^{-1}(x) = \frac{x - d}{c}$$

3) $$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}[g^{-1}(x)] = f^{-1}\left[\frac{x - d}{c}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{x - d}{c} - b}{a} = \frac{x - d - bc}{ac}$$

$$g^{-1}(x) \circ f^{-1}(x) = g^{-1}[f^{-1}(x)] = g^{-1}\left[\frac{x - b}{a}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{x - b}{a} - d}{c} = \frac{x - b - ad}{ac}$$

4) Como $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, resulta:

$$\frac{x - d - bc}{ac} = \frac{x - b - ad}{ac} \Leftrightarrow d + bc = b + ad$$

Resposta: A

Sejam $x_1, \ldots, x_5$ e $y_1, \ldots, y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5 x 5 definida por $a_{ij} = x_i + y_i$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução

Aplicando-se o Teorema de Jacob, o valor do determinante não se altera e, portanto, a característica da matriz inicial também não se altera.

Dessa forma, as características das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 & x_2+y_5 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & x_3+y_4 & x_3+y_5 \\ x_4+y_1 & x_4+y_2 & x_4+y_3 & x_4+y_4 & x_4+y_5 \\ x_5+y_1 & x_5+y_2 & x_5+y_3 & x_5+y_4 & x_5+y_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_2+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_3+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_4+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_5+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

São iguais à característica da matriz

$$D = \begin{bmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 \end{bmatrix}$$, **cujo valor máximo é 2**

Resposta: B

Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo m > n. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é 15/11. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

a) 2 e 11. b) 3 e 10. c) 4 e 9.

d) 5 e 8. e) 6 e 7.

Resolução

1) **A quantidade total de triângulos possíveis de ser formados com estes m + n = 13 pontos é:**

$$n \,.\, C_{m;\,2} + m \,.\, C_{n;\,2} = \frac{n \,.\, m\,(m-1) + m \,.\, n\,(n-1)}{2}$$

A quantidade total de quadriláteros convexos possíveis de ser formados com estes pontos é:

$$C_{m;\,2} \,.\, C_{n;\,2} = \frac{m\,(m-1) \,.\, n\,(n-1)}{4}$$

2) **Como a razão entre o números de quadriláteros e o número de triângulos é $\frac{15}{11}$, tem-se:**

$$\frac{\dfrac{m\,(m-1) \,.\, n\,(n-1)}{4}}{\dfrac{m \,.\, n\,(m+n-2)}{2}} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \frac{(m-1) \,.\, (n-1)}{2 \,.\, (13-2)} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow (m-1) \,.\, (n-1) = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \,.\, n - (m+n) + 1 = 30 \Leftrightarrow m \,.\, n - 13 + 1 = 30 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ **m . n = 42, pois m + n = 13 e m . n ≠ 0 (se um deles fosse nulo, todos os pontos estariam sobre uma única reta, não formando triângulos nem quadriláteros)**

Assim, $\begin{cases} m + n = 13 \\ m \,.\, n = 42 \end{cases} \Rightarrow$ **m = 7 e n = 6, pois m > n**

Resposta: $\boxed{E}$

7

Considere a definição: duas circunferências são *ortogonais* quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1 : x^2 + (y + 4)^2 = 7$, $C_2 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_3 : (x - 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

a) somente C_1 e C_2 são ortogonais.

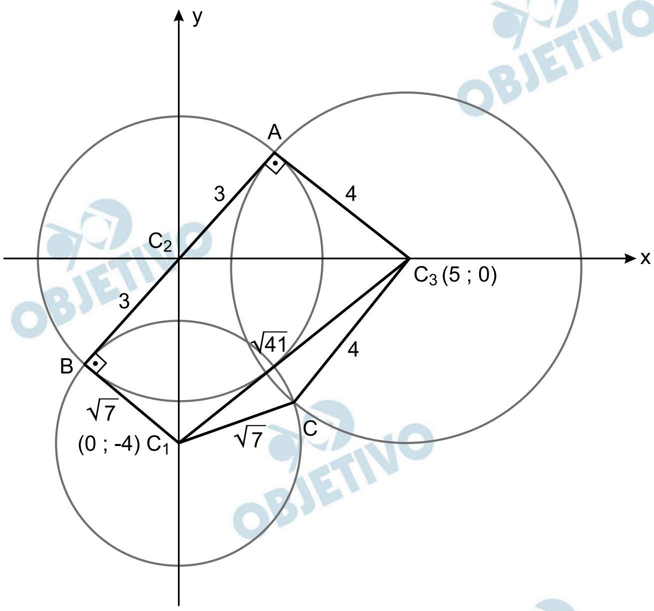
b) somente C_1 e C_3 são ortogonais.

c) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

d) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.

e) não há ortogonalidade entre as circunferências.

Resolução



$$\begin{cases} C_1\text{: } x^2 + (y + 4)^2 = 7 \text{ tem centro } (0; -4) \text{ e raio } \sqrt{7} \\ C_2\text{: } x^2 + y^2 = 9 \text{ tem centro } (0; 0) \text{ e raio } 3 \\ C_3\text{: } (x - 5)^2 + y^2 = 16 \text{ tem centro } (5; 0) \text{ e raio } 4 \end{cases}$$

C_2 é ortogonal a C_3, pois o ΔAC_2C_3 é retângulo em A;
C_2 é ortogonal a C_1, pois o ΔBC_1C_2 é retângulo em B;
C_1 e C_3 não são ortogonais, pois o ΔCC_1C_3 não é retângulo em C.

Resposta: C

8

As raízes do polinôrnio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.   b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.   c) $\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2}$.   e) $3\sqrt{2}$.

Resolução

Raízes do polinômio

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = 0$

–1 é raiz, então:

–1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	0	1	0

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 =$

$= (z + 1)(z^6 + z^4 + z^2 + 1) = (z + 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1) = 0$

1) $z + 1 = 0$

$\boxed{z = -1}$

2) $z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1 \Rightarrow \boxed{z = \pm i}$

3) $z^4 + 1 = 0$

$\boxed{z^4 = -1}$, **portanto z são as raízes quartas de –1.**

Como $z = 1 \cdot (\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$

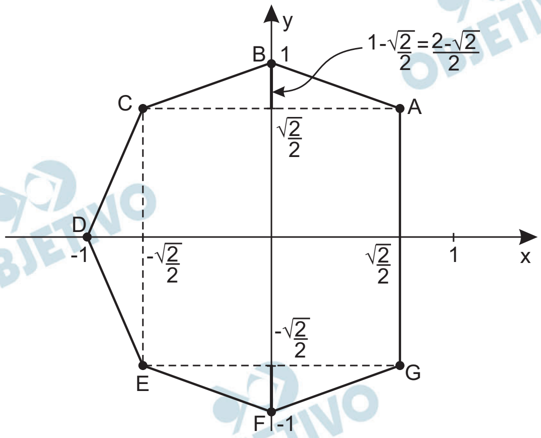
$z_1 = 1 \cdot (\cos 45° + i \text{ sen } 45°) = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i}$

$z_2 = 1 \cdot (\cos 135° + i \text{ sen } 135°) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i}$

$z_3 = 1 \cdot (\cos 225° + i \text{ sen } 225°) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i}$

$z_4 = 1 \cdot (\cos 315° + i \text{ sen } 315°) = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i}$

Representando no plano complexo:



Área S do polígono é tal que:

$S = A_{\square ACEG} + 3A_{\triangle ABC}$

$$S = (\sqrt{2})^2 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = 2 + \frac{6\sqrt{2} - 6}{4}$$

$$S = 2 + \frac{3\sqrt{2} - 3}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{2} + 1}{2}}$$

Resposta: D

9

Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le 1$.

c) $1 < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le \dfrac{3}{2}$.

d) $\dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \le 2$.

e) $2 < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Resolução

1) $$\begin{cases} \log_2 \pi = a \\ \log_5 \pi = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_\pi 2 = \dfrac{1}{a} \\ \log_\pi 5 = \dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\pi 10 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

2) $$2 < \log_\pi 10 < 3 \Rightarrow 2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$$

Resposta: $\boxed{E}$

O lugar geométrico das soluções da equação $x^2 + bx + 1 = 0$, quando $|b| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, é representado no plano complexo por

a) dois pontos.

b) um segmento de reta.

c) uma circunferência menos dois pontos.

d) uma circunferência menos um ponto.

e) uma circunferência.

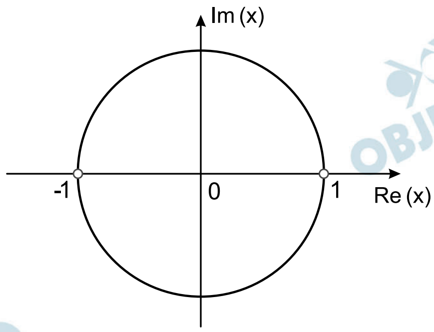
Resolução

Pela Fórmula de Báskara, as soluções da equação são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{(4 - b^2).(-1)}}{2} =$$

$$= \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}\,i$$

Como $|x| = \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}\right)^2} = 1$, **no plano complexo, os possíveis valores de x pertencem a uma circunferência de centro na origem, raio 1, excluídos os pontos (–1; 0) e (1; 0), pois para x = (–1; 0) = –1 + 0i ou x = (1; 0) = 1 + 0i, deveríamos ter $|b| = 2$, o que não ocorre.**



Resposta: Ⓒ

Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\hat{B} = \pi/2$, $\hat{C} = \pi/3$ e o lado BC = 1 cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

a) $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

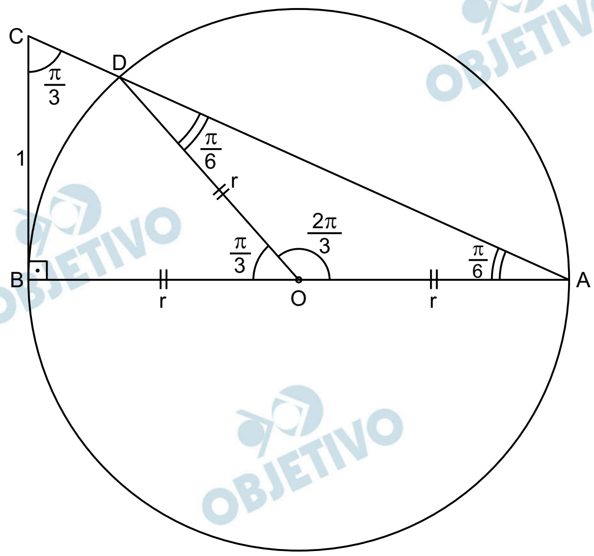
b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{2}$.

c) $\dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) $\dfrac{5\sqrt{3}}{16} - \dfrac{\pi}{8}$.

e) $\dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

Resolução



I) No triângulo ABC, temos: $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2r}{1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2r}{1} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Sendo S a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, temos:

$$S = S_{\text{triângulo ABC}} - S_{\text{setor BOD}} - S_{\text{triângulo DOA}} =$$

$$= \frac{2r\,.\,1}{2} - \frac{60°}{360°}\,.\,\pi\, r^2 - \frac{1}{2}\,.\,r\,.\,r\,.\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\,\pi\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\,\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$$

Resposta: D

Com relação a equação $\dfrac{tg^3x - 3tg\,x}{1 - 3tg^2x} + 1 = 0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

e) existem duas soluções no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

Resolução

$$\frac{tg^3x - 3tg\,x}{1 - 3tg^2x} = -1 \Leftrightarrow tg^3x - 3tg\,x = -1 + 3tg^2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg^3x - 3tg^2x - 3tg\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (tg\,x + 1)(tg^2x - tg\,x + 1) - 3tg\,x\,(tg\,x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

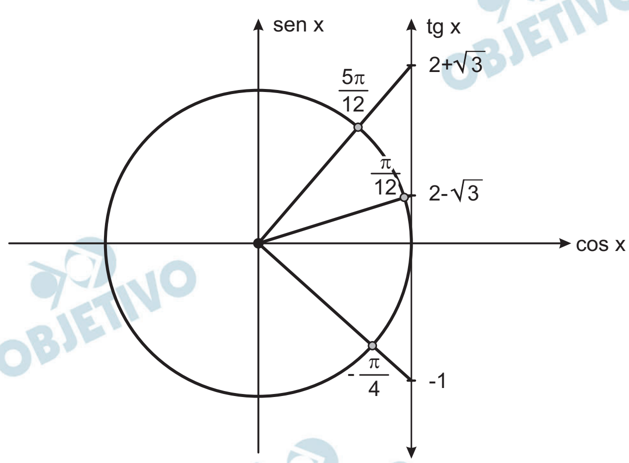
$$\Leftrightarrow (tg\,x + 1)(tg^2x - 4tg\,x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\,x + 1 = 0 \text{ ou } tg^2x - 4tg\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\,x = -1 \text{ ou } tg\,x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } tg\,x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12}$$

A partir do ciclo trigonométrico:



Podemos concluir que no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ a soma das soluções é $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} > 0$

Resposta: B

Sejam A e B matrizes quadradas n x n tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade n x n. Das afirmações:

I) $I_n - B$ é inversível;

II) $I_n - A$ é inversível;

III) $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

a) Somente I.

b) Somente II.

c) Somente III.

d) Somente I e II.

e) Todas.

Resolução

As afirmações I e II são verdadeiras, pois:

$$(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n^2 - B - A + AB =$$

$$= I_n - (B + A) + AB = I_n - AB + AB = I_n$$

Daí, $\det[(I_n - A) \cdot (I_n - B)] = \det I_n = 1$

e $\det(I_n - A) \neq 0 \Rightarrow I_n - A$ **é inversível**

e $\det(I_n - B) \neq 0 \Rightarrow I_n - B$ **é inversível**

A afirmação III é verdadeira, pois:

Como $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n \Leftrightarrow$

$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$ **temos:**

$$I_n^2 - A - B + BA = I_n$$

$$I_n - (A + B) + BA = I_n$$

$$-AB + BA = 0$$

$$BA = AB$$

Resposta: $\boxed{E}$

Se o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)\,z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)\,z = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $0, -1, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

c) $0, -1, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

d) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$.

e) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

Resolução

Um sistema homogêneo admite infinitas soluções ⇔

⇔ D = 0, daí:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & 2a^4 - a \\ 1 & a & a^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2a^5 - 2a^2 + 2a^4 - a - 2a^2 - 2a^5 + a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^4 - 3a^2 - a = 0 \Rightarrow a\,(2a^3 - 3a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = 0} \text{ ou } \begin{cases} 2a^3 - 3a - 1 = 0 \\ \text{em que } a = -1 \text{ e raiz} \end{cases}$$

então: $\boxed{a = -1}$ **é outra raiz**

Fatorando, vem:

$$(a + 1)\,.\,(2a^2 - 2a - 1) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \left\{ 0; -1; \frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Resposta: B

Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio p(x) é dado por p(x) = detA, então o produto das raízes de p(x) é

a) $\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{1}{3}$. c) $\dfrac{1}{5}$. d) $\dfrac{1}{7}$. e) $\dfrac{1}{11}$.

Resolução

$$\mathbf{p\,(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =}$$

$$\mathbf{= \begin{vmatrix} 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 3+x & 4+x^2 & 5+x^3 \\ 2+2x & 1+2x^2 & 1+2x^3 \end{vmatrix}} \begin{matrix} + \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{p\,(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =} \quad -1$$

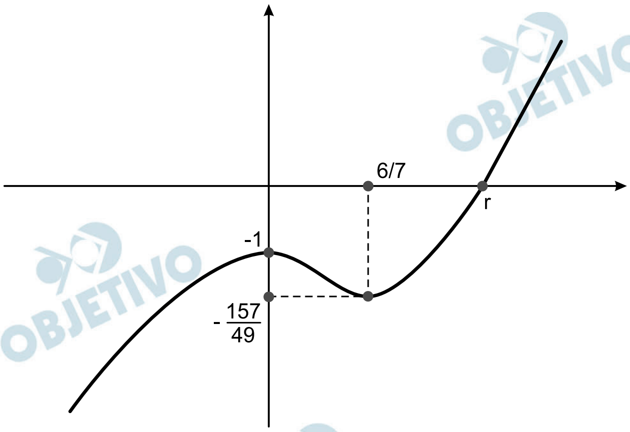
$$\mathbf{= \begin{vmatrix} 2-x & 3-x^2 & 4-x^3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow p(x) = 9\,(3-x^2) - 7\,(4-x^3) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow p(x) = 7x^3 - 9x^2 - 1}$$

A função $p(x) = 7x^3 - 9x^2 - 1$ está definida em $\mathbb{R}$, conforme o enunciado, e portanto, o produto das raízes da equação $7x^3 - 9x^2 - 1 = 0$ seria $-\dfrac{-1}{7} = \dfrac{1}{7}$

se todas elas fossem reais e, neste caso, a resposta seria *D*.

Calculando o máximo e o mínino relativos da função *p*, conclui-se que a equação tem *uma só* raiz real e duas raízes complexas (não reais).
O gráfico da função *p* é do tipo



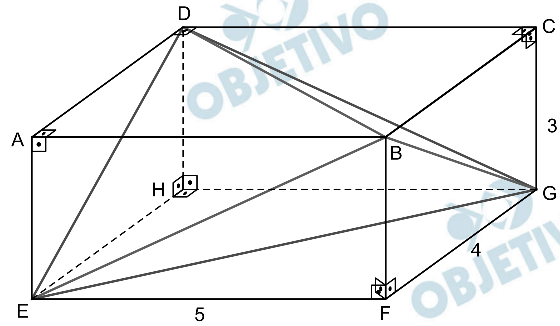
A única raiz real r é maior que $\frac{6}{7}$ e, portanto, nenhuma alternativa está correta.

Resposta oficial: D

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10. b) 12. c) 15. d) 20. e) 30.

Resolução



Os tetraedros ABDE, BCDG, EFGB e EHGD são tetraedros trirretângulos e cada um tem volume, em cm^3, igual a $V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 10$

Assim, o volume V, em cm^3, do tetraedro BGDE, que satisfaz as condições do exercício, é:

$V = V_{paralelepípedo} - 4 \cdot V' = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 10 = 20$

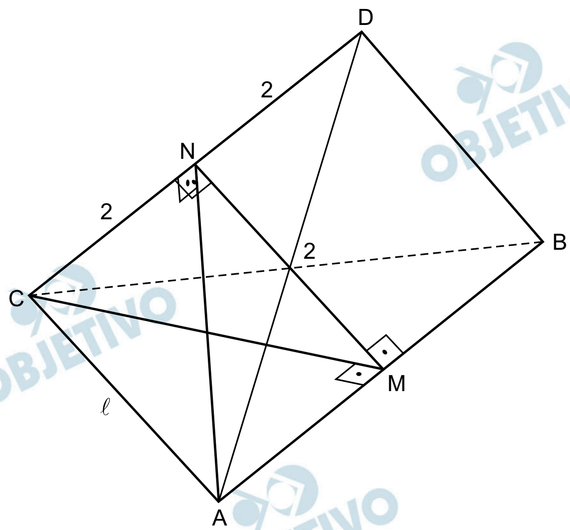
Resposta: D

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum AB. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se MN = CN = 2 cm, então a altura relativa ao lado CD do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\dfrac{\sqrt{60}}{3}$. b) $\dfrac{\sqrt{50}}{3}$. c) $\dfrac{\sqrt{40}}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Resolução



I) No triângulo retângulo isósceles CNM, temos:

$CM = 2\sqrt{2}$

II) Como $\overline{CM}$ é altura do triângulo equilátero ABC, sendo ℓ a medida do lado do triângulo, temos:

$$2\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

III) O triângulo CAD é isósceles de base $\overline{CD}$, pois $AC = AD = \ell$. Assim, a altura $\overline{AN}$ relativa ao lado $\overline{CD}$ é dada por:

$$(AN)^2 + (CN)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (AN)^2 + 2^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AN = \sqrt{\frac{32}{3} - 4} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{60}}{3}$$

Resposta: A

18

Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da

matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) –96. b) –85. c) 63. d) 99. e) 115.

Resolução

1) $a_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$

2) $a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 18 \Rightarrow a_2 = 11$

3) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, \ldots)$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 7 \\ 19 \\ 33 \end{matrix}} & \begin{matrix} 11 \\ 23 \\ 35 \end{matrix} & \begin{matrix} 15 \\ 27 \\ 39 \end{matrix} \end{vmatrix} =$

x(–1) + +

$= \begin{vmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 19 \\ 33 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 19 & 4 & 0 \\ 33 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 19 & 4 \end{vmatrix} =$

x(–2) +

$= 2 \cdot 1 \cdot (28 - 76) = 2 \cdot (-48) = -96$

Resposta: A

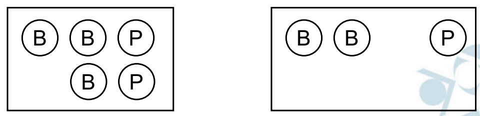
19

São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

a) $\dfrac{8}{15}$. b) $\dfrac{7}{15}$. c) $\dfrac{6}{15}$.

d) 1. e) $\dfrac{17}{15}$.

Resolução



1 bola de cada caixa:

$$\text{B e P ou P e B ou P e P}$$

$$\textbf{(I)}\ P_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$$

$$\text{B e B ou P e P}$$

$$\textbf{(II)}\ P_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{9}{15} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15}$$

Resposta: E

Para que o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = c^2 \end{cases}$ admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

a) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[$.

b) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

c) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

d) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

e) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

Resolução

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

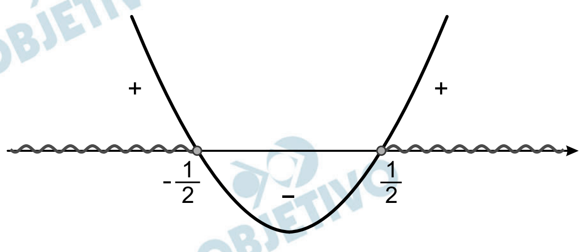
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - xy + y^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 = c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 - c^2 = 0$$

Para que o sistema admita apenas soluções reais, devemos ter:

$$(-3)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, (1 - c^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12c^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow c \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } c \geq \frac{1}{2}$$



Resposta: E

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

21

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão – 5. Determine o número de vértices do poliedro.

Resolução

Sejam (x + 5, x e x – 5) as quantidades de arestas, faces triangulares e faces quadrangulares, respectivamente, pois a sequência acima é uma progressão aritmética de razão – 5.

1) O número A de arestas é:

$$A = \frac{3 \,.\, x + 4 \,.\, (x - 5)}{2} = \frac{7x - 20}{2}$$

2) Do enunciado, temos:

$$x + 5 = \frac{7x - 20}{2} \Leftrightarrow 2x + 10 = 7x - 20 \Leftrightarrow x = 6$$

3) Logo, $A = \dfrac{7 \,.\, 6 - 20}{2} = 11$

4) O número F de faces é:

$$F = x + x - 5 = 6 + 6 - 5 = 7$$

5) Da Relação de Euler, o número V de vértices é:

$$V - 11 + 7 = 2 \Leftrightarrow V = 6$$

Resposta: Seis vértices

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

Resolução

$$3^{x-2} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} \leq \frac{1081}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x}{9} + 3 \,.\, 3^x + 9 \,.\, 3^x + 27 \,.\, 3^x + 81 \,.\, 3^x \leq \frac{1081}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x}{9} + 120 \,.\, 3^x \leq \frac{1081}{18} \Leftrightarrow \frac{1081 \,.\, 3^x}{9} \leq \frac{1081}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 3^x \leq \log_3 \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \log_3 \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

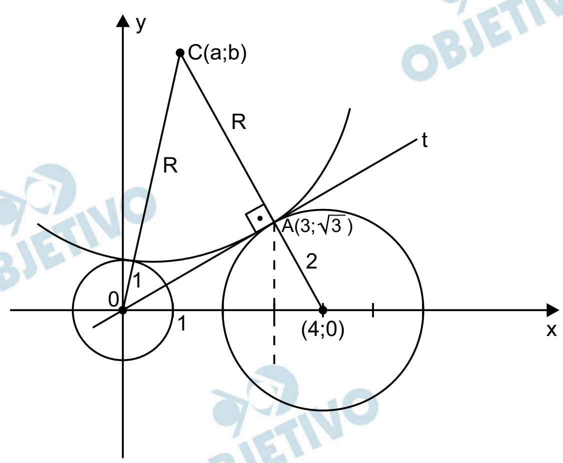
Resposta: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_3 \frac{1}{2} \right\}$

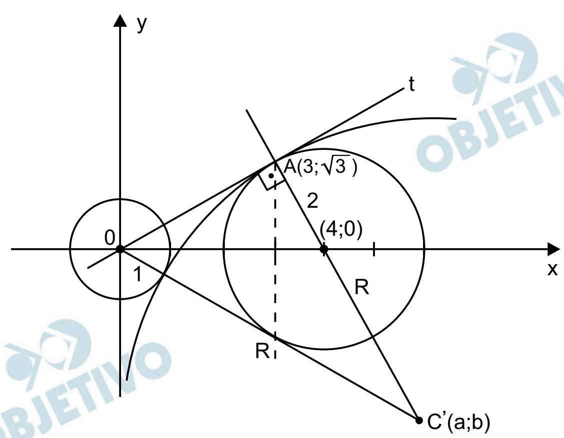
No plano cartesiano são dadas as circunferências
$C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 4$.

Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

Resolução

1) **O ponto $A = (3; \sqrt{3})$ pertence à circunferência de equação $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ e será o ponto de tangência dessa circunferência com a circunferência pedida. Desta forma, há duas possibilidades: ser tangente externa a ambas ou ser tangente externa à menor e interna à circunferência maior.**





A reta que passa pelos pontos A e C_2 (4; 0) tem coeficiente angular $m_{\overleftrightarrow{AC_2}} = \dfrac{\sqrt{3} - 0}{3 - 4} = -\sqrt{3}$. A reta t, tangente à circunferênia C_2 no ponto A, tem equação $y - \sqrt{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - 3) \Leftrightarrow x - \sqrt{3}\,y = 0$ e, portanto, passa pela origem do sistema de eixos, centro da circunferência C_1.

2) No triângulo retângulo OAC ou OAC', retângulo em A, tem-se $OC^2 = OA^2 + AC^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (R+1)^2 = \left(\sqrt{(3-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2}\right)^2 + R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 + 2R + 1 = 12 + R^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{11}{2}}$$, em que

R é o raio da circunferência pedida.

3) Os pontos C (a; b) (ou C'), A $(3; \sqrt{3})$ e B (4; 0) estão alinhados e, portanto:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\,a + b = 4\sqrt{3}$$

4) A distância do ponto C à reta t, tangente, é igual ao raio R. Assim:

$$\frac{|a - \sqrt{3}\,b|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow |a - \sqrt{3}\,b| = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - \sqrt{3}\,b = 11 \text{ ou } a - \sqrt{3}\,b = -11$$

5) As coordenadas dos possíveis centros são soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a + b = 4\sqrt{3} \\ a - \sqrt{3}\,b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{23}{4} \text{ e } b = -\frac{7\sqrt{3}}{4}$$

ou

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a + b = 4\sqrt{3} \\ a - \sqrt{3}\,b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \text{ e } b = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: Os centros podem ser $\left(\frac{1}{4}; \frac{15\sqrt{3}}{4}\right)$ ou $\left(\frac{23}{4}; -\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$ e o raio é sempre $\frac{11}{2}$

Seja $z = \cos \frac{\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{\pi}{7}$. Pedem-se:

a) Use a propriedade $z^k = \cos \frac{k\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$ e $\cos \frac{5\pi}{7}$ em função de z.

b) Determine inteiros a e b tais que
$\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Resolução

1) Observemos que $\cos \frac{k\pi}{7} = \cos \frac{(14-k)\pi}{7}$

$\text{sen}\, \frac{k\pi}{7} = -\,\text{sen}\, \frac{(14-k)\pi}{7}$, pois

$$\frac{k\pi}{7} + \frac{(14-k)\pi}{7} = 2\pi$$

Assim:

$$z^k = \cos \frac{k\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{k\pi}{7} \quad \text{(I) e}$$

$$z^{14-k} = \cos \frac{(14-k)\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{(14-k)\pi}{7} =$$

$$= \cos \frac{k\pi}{7} - i\,\text{sen}\, \frac{k\pi}{7} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), resulta:

$$z^k + z^{14-k} = 2\cos \frac{k\pi}{7} \Leftrightarrow \cos \frac{k\pi}{7} = \frac{z^k + z^{14-k}}{2}$$

Desta forma:

$$\cos \frac{\pi}{7} = \frac{z + z^{13}}{2};\ \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{z^3 + z^{11}}{2} \text{ e}$$

$$\cos \frac{5\pi}{7} = \frac{z^5 + z^9}{2}$$

b) Como $z^{14} = \cos \frac{14\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{14\pi}{7} =$

$$= \cos 2\pi + i\,\text{sen}\, 2\pi = 1 \text{ e } z^7 = \cos \frac{7\pi}{7} + i\,\text{sen}\, \frac{7\pi}{7} =$$

$= \cos \pi + i\,\text{sen}\, \pi = -1$, temos:

$$\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} =$$

$$= \frac{z + z^{13}}{2} + \frac{z^3 + z^{11}}{2} + \frac{z^5 + z^9}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(z + z^3 + z^5 + z^9 + z^{11} + z^{13}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 + z^{11} + z^{13} - z^7) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z\,.\,[(z^2)^7 - 1]}{z^2 - 1} - z^7\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z\,.\,(z^{14} - 1)}{z^2 - 1} - z^7\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z\,.\,(1 - 1)}{z^2 - 1} - (-1)\right] = \frac{1}{2}\,[0 + 1] = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, podemos ter a = 1 e b = 2

Respostas: a) $\cos \frac{\pi}{7} = \frac{z + z^{13}}{2}$;

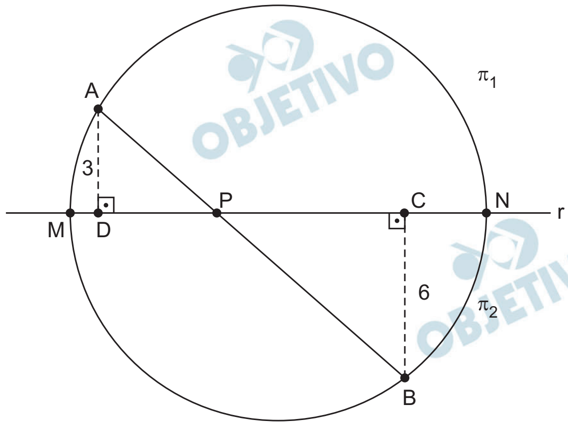
$\cos \frac{3\pi}{7} = \frac{z^3 + z^{11}}{2}$ e

$\cos \frac{5\pi}{7} = \frac{z^5 + z^9}{2}$

b) **Possíveis valores inteiros de a e b são a = 1 e b = 2**

Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que d(A, r) = 3, d(B, r) = 6 e d(A, B) = 15. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

Resolução



1) **Da semelhança dos triângulos ADP e BCP, resulta:**

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{AP}{BP} \Leftrightarrow BP = 2AP$$

Como AP + BP = 15, tem-se AP = 5 e BP = 10

2) **Da potência do ponto P em relação à circunferência, e fazendo MP = x e NP = y, resulta:**

$$MP \,.\, NP = AP \,.\, BP \Leftrightarrow x \,.\, y = 5 \,.\, 10 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x}$$

3) $MN = MP + NP = x + y = x + \dfrac{50}{x}$

4) **A função** $S(x) = x + \dfrac{50}{x} = \left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 10\sqrt{2}$

Como $x > 0$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ **e** $\left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \in \mathbb{R}$, **então**

$\left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$ **e, portanto,** $S(x)$

é mínima quando $\left(\sqrt{x} - \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

Neste caso, $S(x) = MN = 10\sqrt{2}$

Resposta: MN mínimo vale $10\sqrt{2}$

De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \le k - r \le 6$ e $0 \le k \le 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma

$$\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r}.$$

Resolução

a) **Número de elementos do espaço amostral:**

$$C_{16,k} = \binom{16}{k}$$

Número de elementos do evento:

$$\underbrace{C_{10,\,r}}_{\text{Escolhas de r brancas}} \cdot \underbrace{C_{6,\,k-r}}_{\text{Escolhas de k – r pretas}} = \binom{10}{r} \cdot \binom{6}{k-r}$$

Probabilidade:

$$p = \frac{\binom{10}{r} \cdot \binom{6}{k-r}}{\binom{16}{k}}$$

b) **Note-se que a expressão na somatória equivale ao numerador da probabilidade (p) obtida no item a com k = 6. Fazendo k = 6 em p:**

$$p = \frac{\binom{10}{r} \cdot \binom{6}{6-r}}{\binom{16}{6}}$$

Podemos considerar p, com k = 6, como a probabilidade de r bolas brancas serem retiradas em um total de 6 bolas selecionadas.

A somatória $\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r}$ representa todos os casos possíveis de bolas brancas retiradas, pois $0 \le r \le 6$ e $k = 6$. Logo, esta somatória deve equivaler ao número de elementos do espaço amostral: $\binom{16}{6}$, para que a probabilidade seja 1.

$$\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r} = \binom{16}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r} = 8008$$

Resposta: a) $\dfrac{\dbinom{10}{r} \cdot \dbinom{6}{k-r}}{\dbinom{16}{k}}$ b) 8008

27

Quantos pares de números inteiros positivos (A, B) existem cujo mínimo múltiplo comum é 126×10^3? Para efeito de contagem, considerar $(A, B) \equiv (B, A)$.

Resolução

Sabendo que $126 \cdot 10^3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$, e sendo A e B divisores de $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$, podemos escrevê-los como:

$A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$

$B = 2^e \cdot 3^f \cdot 5^g \cdot 7^h$

O mmc $(A; B) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1$; assim:

Máx $\{a; e\} = 4$ Máx $\{b; f\} = 2$

Máx $\{c; g\} = 3$ Máx $\{d; h\} = 1$

Assim, o conjunto P de todos os pares (a; e) possíveis é:

$P\{(4;0), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (0;4), (1;4), (2;4), (3;4)\}$ e $n(P) = 9$

O conjunto Q de todos os pares (b; f) possíveis é:

$Q = \{(0; 2), (1; 2), (2; 2), (2; 1), (2; 0)\}$ e $n(Q) = 5$

O conjunto R de todos os pares (c; g) possíveis é:

$R = \{(0; 3), (1; 3), (2; 3), (3; 3), (3; 0), (3; 1), (3; 2)\}$ e $n(R) = 7$

O conjunto S de todos os pares (d; h) possíveis é:

$S = \{(0; 1), (1; 0), (1; 1)\}$ e $n(S) = 3$

Assim, todos os números (A;B), com $A \neq B$, tais que mmc $(A; B) = 126 \cdot 10^3$ são obtidos por:

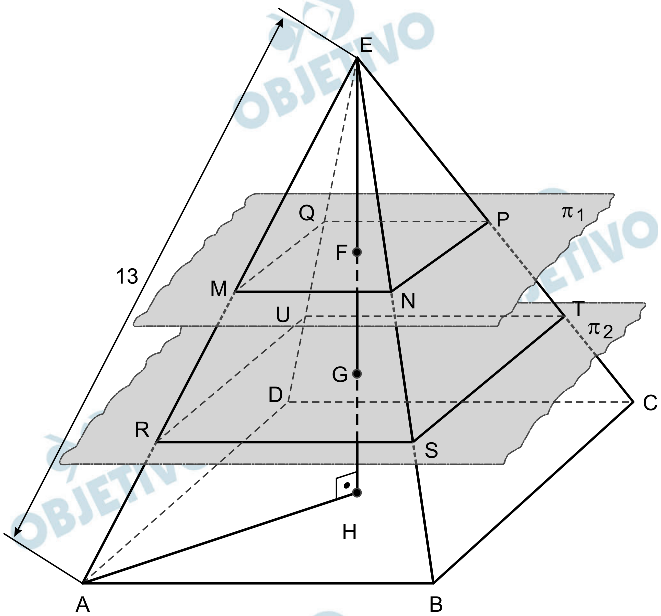
$$\frac{9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 - 1}{2} = \frac{945 - 1}{2} = 472$$

Considerando o caso A = B, temos então 473 possibilidades.

Resposta: 473 pares

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2}$ cm^2. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Resolução



I) Sendo r a medida do raio do círculo inscrito na base, temos: $\pi r^2 = \frac{25\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Assim, $AB = 2r = 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$,

$AC = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$ **e** $AH = 5$

II) No triângulo retângulo AHE, temos:

$(EH)^2 + (AH)^2 = (AE)^2 \Rightarrow (EH)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = 12$

III) Sendo V_1 **o volume da pirâmide ABCDE,** V_2 **o volume da pirâmide RSTUE e** V_3 **o volume da pirâmide MNPQE, temos:**

a) $V_3 = \frac{1}{3} \cdot V_1 \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{3}$

Assim, $\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{EF}{EH}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{EF}{12}\right)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow EF = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow EF = 4\sqrt[3]{9}$$

b) $V_2 = \frac{2}{3} \cdot V_3 \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{2}{3}$

Assim, $\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{EG}{EH}\right)^3 \Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{EG}{12}\right)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow EG = \frac{12\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow EG = 4\sqrt[3]{18}$$

Logo, $FG = EG - EF = 4\sqrt[3]{18} - 4\sqrt[3]{9} =$

$= 4\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$

c) $GH = EH - EG = 12 - 4\sqrt[3]{18} = 4\left(3 - \sqrt[3]{18}\right)$

Respostas: $EF = 4\sqrt[3]{9}$, $FG = 4\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$ e

$GH = 4\left(3 - \sqrt[3]{18}\right)$

29

Seja p(x) um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de p(x), determine o menor grau possível de p(x).

Resolução

p(x) é divisível por $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$

Mas $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 2) = d_1(x)$

Ainda:

p(x) é divisível por $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

Mas $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 = d_2(x)$

O mínimo múltiplo comum é

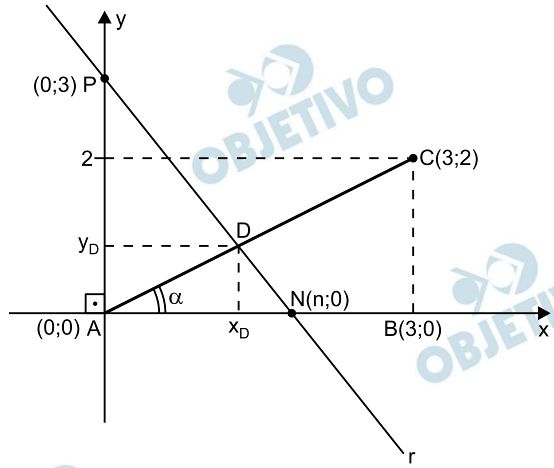
$\text{mmc}\,(d_1(x); d_2(x)) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

e o menor grau de p(x), para as condições dadas, é igual a 4 (quatro).

Resposta: 4

No plano cartesiano são dados o ponto P = (0, 3) e o triângulo de vértices A = (0, 0), B = (3, 0) e C = (3, 2). Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

Resolução



Seja r a reta que passa por P(0; 3) D (x_D; y_D), N (n; 0), (n > 0), e divide o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

I) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y_D}{x_D} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow y_D = \dfrac{2}{3} \cdot x_D$

II) A área do triângulo ADN é tal que

$$\frac{n \cdot y_D}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{2}\right) \Leftrightarrow y_D = \frac{3}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x_D = \frac{3}{n} \Leftrightarrow x_D = \frac{9}{2n}$$

III) Os pontos P, D e N são alinhados e, portanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ x_D & y_D & 1 \\ n & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ \dfrac{9}{2n} & \dfrac{3}{n} & 1 \\ n & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 2n - 9 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 + \sqrt{19}}{2}\text{, pois } n > 0$$

Resposta: $N\left(\dfrac{1 + \sqrt{19}}{2} ; 0\right)$